срок сдачи 11 октября 2023г.

---

1. Частица движется в фазовом пространстве с каноническими координатами $\vec{x} = \{x_i\}_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} = \{p_i\}_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$.

а) Вычислите скобки Пуассона компонент вектора

$$B_i = f(\vec{x}^2, \vec{p}^2)\, x_i + (\vec{x} \cdot \vec{p})\, p_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

с компонентами ветора момента импульса частицы $\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p}$, считая, что $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

б)* Считая, что динамика частицы задается гамильтонианом

$$H = \vec{p}^2 + U(\vec{x}^2),$$

где потенциал $U \in C^1(\mathbb{R}^+)$, найдите все возможные пары функций f и U, при которых компоненты вектора $\vec{B}$ являются интегралами движения частицы.

в) Вычислите скобки Пуассона компонент вектора $\vec{B}$: $\{B_i, B_j\}$, $i, j = 1, 2, 3$, в случае, когда f — произвольная функция. Подставьте в полученные формулы выражение для f из пункта б) и выразите скобки Пуассона в терминах момента импульса $\vec{M}$ и гамильтониана H частицы.

Подсказка: в пункте б) должно получиться, что частица движется в поле тяготения, а сохраняющийся вектор $\vec{B}$ (с точностью до скалярного множителя) является вектором Лапласа-Рунге-Ленца.

2. Внутренние степени свободы закреплённой в пространстве квантовой частицы (скажем, электрона в ловушке) описываются нормированным вектором 2-мерного комплексного пространства.

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad ||\phi||^2 = \sum_i |\phi_i|^2 = 1.$$

В эксперименте измеряются компоненты вектора спина частицы $\vec{S}$, задаваемые операторами $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, $i = 1, 2, 3$, где σ_i — матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Квантовая частица находится в состоянии, про которое известно, что вероятность получить при измерении наблюдаемой S_1 значение $\frac{\hbar}{2}$ равна $\rho_{S_1 = \hbar/2} = \sin^2\omega$, где $\omega \in [0, \pi/2]$ — параметр задачи.

а) Найдите общий вид состояния $|\phi\rangle$, удовлетворяющего условию задачи. Однозначно ли оно определено?
Указание. При решении задачи позаботьтесь о выборе оптимального базиса векторов в $\mathbb{C}^2$.

б) Для каждого из построенных в пункте а) состояний рассчитайте вероятность $\rho_{S_2 = \hbar/2}$ получить при измерении наблюдаемой S_2 значение $\hbar/2$. При каких условиях на ω возможно, чтобы $\rho_{S_2 = \hbar/2} = \rho_{S_1 = \hbar/2}$? Однозначно ли фиксируется состояние $|\phi\rangle$ заданием значений $\rho_{S_1 = \hbar/2}$ и $\rho_{S_2 = \hbar/2}$?

3. Внутренние степени свободы закреплённой в пространстве квантовой частицы (например, атома в кристалле) описываются нормированным вектором 3-мерного комплексного пространства.

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \qquad ||\phi||^2 = \sum_i |\phi_i|^2 = 1.$$

В эксперименте измеряются компоненты вектора спина частицы $\vec{S}$, задаваемые операторами $\hat{S}_i = \hbar\, J_i$, $i = 1, 2, 3$, где J_i — 3×3 матрицы вида

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что для S_i выполняются коммутационые соотношения

$$[S_i, S_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} S_k.$$

Динамика частицы задается оператором Гамильтона

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Определите возможные результаты измерения энергии частицы и состояния, в которых она может оказаться после измерения.

б) С какой вероятностью мы получим все возможные значения проекции спина S_3, если до измерения система находилась в основном состоянии (т.е., состоянии с наинизшим значением энергии).

в) Вычислите среднее значение и дисперсию проекции спина S_2 при измерении ее в основном состоянии.

г) Предполагая, что в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в состоянии $|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ с равновероятно распределенным значением проекции спина S_3, определите ее состояние в произвольный момент времени. Вычислите вероятность обнаружить частицу в момент времени t снова в состоянии $|\phi_0\rangle$.

Меняется ли со временем вероятность обнаружить частицу в состоянии с определенным значением энергии? Почему?

д) В условиях пункта г) определите среднее значение проекции спина S_2 в произвольный момент времени t.

4. Внутреннее состояние системы из двух взаимодействующих квантовых частиц описывается вектором

$$|\phi^{(1)}\rangle \otimes |\phi^{(2)}\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2,$$

а ее эволюция во времени задается оператором Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{1}{\hbar}\Big(\hat{\vec{S}}^{(1)}, \hat{\vec{S}}^{(2)}\Big) + \frac{\beta}{2}\,\hat{S}_3^{(1)} + \frac{1}{2\beta}\,\hat{S}_3^{(2)},$$

где $\hat{\vec{S}}^{(1)} := \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \otimes id$ и $\hat{\vec{S}}^{(2)} := id \otimes \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ — операторы спина первой и второй частицы (см. задачу 2). Первое слагаемое гамильтониана описывает взаимодействие спинов частиц, а два последних — действие на частицы внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси $O\vec{z}$. Параметр $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ характеризует магнитное поле.

а) Определите возможные значения энергии системы и отвечающие им векторы состояния.

б) Какие из наблюдаемых величин

$$\left(\hat{\vec{S}}\right)^2 = \left(\hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)}\right)^2; \quad \hat{S}_3 = \hat{S}_3^{(1)} + \hat{S}_3^{(2)}; \quad \left(\hat{\vec{S}}^{(1)}\right)^2; \quad \hat{S}_3^{(1)}$$

сохраняются при эволюции системы всегда? Какие сохряняются лишь при определенных значениях параметра β?

в) В начальный момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии

$$|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Какова вероятность наблюдать в момент времени t систему в состоянии $|\Psi(t)\rangle$ равном

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

г) Для наблюдаемой $\left(\hat{\vec{S}}\right)^2$ – *квадрата величины полного спина системы 2-х частиц* – определите его минимальное и максимальное возможные значения, а также состояния, в которых эти значения наблюдаются.

В условиях пункта в) рассчитайте среднее значение $\left\langle \hat{\vec{S}}^2 \right\rangle$ и дисперсию $\Delta\left(\hat{\vec{S}}^2\right)$ в момент времени t.

5. (необязательная) Постройте реализацию операторов спина $\hat{S}_i$, $i = 1, 2, 3$, в 4-мерном комплексном пространстве, если известно, что $\hat{S}_3$ задается диагональной матрицей:

$$\hat{S}_3 = \mathrm{diag}\{\, 3\hbar/2,\ \hbar/2, -\hbar/2, -3\hbar/2\}.$$

Придумайте реализацию операторов спина в комплексном пространстве произвольной размерности.