

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2023  
ЛИСТОК 1

Интеграл вида  $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ , где  $C$  – гладкий замкнутый контур, а  $f$  – функция, непрерывная на контуре  $C$  кроме, возможно, конечного числа точек, где она может иметь интегрируемый разрыв, называется *интегралом типа Коши*. Обозначим через  $F^+(z_0)$ ,  $F^-(z_0)$  предельные значения функции  $F(z)$  при стремлении  $z$  к точке  $z_0 \in C$  соответственно внутри и снаружи контура, а через  $F(z_0)$  – сингулярный интеграл

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z_0},$$

понимаемый в смысле главного значения.

1. Докажите следующие соотношения:

а)  $F^\pm(z_0) = F(z_0) \pm \frac{1}{2}f(z_0)$  (формулы Сохоцкого),

б)  $F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2}f(z_0)$ .

2. Вычислите интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{|w|=1} \frac{\varphi(w)}{w - z} dw$ , где  $\varphi(w) = \frac{2}{w(w - 2)}$ .

3. Пусть  $C$  – замкнутый контур. Найдите  $F^\pm(z)$  в случаях:

а)  $f(\zeta) = (\zeta - a)^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , точка  $a$  внутри  $C$ ;

б)  $f(\zeta) = (\zeta - a)^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , точка  $a$  вне  $C$ ;

в)  $f$  голоморфна внутри  $C$  кроме конечного числа простых полюсов в точках  $a_i$ ;

г)  $f(\zeta) = \sqrt{\frac{\zeta - a}{\zeta - b}}$  – однозначная вне разреза по дуге между  $a$  и  $b$  внутри  $C$  ветвь корня ( $f(\infty) = 1$ ).

4. Докажите, что если  $f(z) = h^+(z) + h^-(z)$ , где  $h^+$  и  $h^-$  – граничные значения функций, аналитических соответственно внутри и вне контура  $C$ , то  $F^+(z_0) = h^+(z_0) + h^-(\infty)$ ,  $F^-(z_0) = -h^-(z_0) + h^-(\infty)$ .

5. Вычислите

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z},$$

где  $C$  – окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $a \in \mathbb{C}$  и проверьте на этом примере формулы Сохоцкого.

6. Пусть  $C$  – вещественная прямая, пробегаемая слева направо,  $f(x) = 1$  при  $|x| \leq 1$  и  $f(x) = 0$  при  $|x| > 1$ . Найдите  $F(z)$ , предельные значения  $F^\pm(x)$  и главное значение  $F(x)$  при  $x \in \mathbb{R}$ .

7. Вычислите интегралы:

a) P.V.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx,$

б) P.V.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{1-x^4} dx,$

в) P.V.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 5x + 6},$

г) P.V.  $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{t^2 + 3}{t-x} dt, \quad x \in (-1, 1),$

д) P.V.  $\int_0^1 \log \frac{1-t}{t} \frac{dt}{t-x}, \quad x \in (0, 1).$