Прикладные методы анализа – 2023

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

Интегралом типа Коши называется интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где f – некоторая (непрерывная) функция на кривой Γ. Кривая может быть как замкнутой, так и разомкнутой. Функция f называется плотностью, а функция $\dfrac{1}{\zeta - z}$ – *ядром Коши.*

Голоморфность интеграла типа Коши. Интеграл типа Коши является голоморфной функцией везде вне кривой Γ.

Теорема. *Интеграл типа Коши является голоморфной функцией в любой точке z, не лежащей на кривой Γ, причем*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)}$$

и

$$\sigma := \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)}.$$

Так как z не лежит на кривой Γ, всегда можно указать $\delta > 0$ такое, что замкнутый диск $|\zeta - z| \le \delta$ будет находиться на конечном расстоянии d от Γ. Пусть $|h| < \delta$. Очевидно, для всех точек $t \in \Gamma$ будем иметь $|t - z| > d$, $|t - z - h| > d$. Тогда

$$|\sigma| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{h f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)} \right| \;<\; \frac{hLM}{2\pi d^3},$$

где L – длина кривой Γ, а $M = \max|f(t)|$ при $t \in \Gamma$. Поэтому предел $h \to 0$ существует и равен 0. ■

Интеграл в смысле главного значения. Чтобы изучить вопрос о граничных значениях интеграла типа Коши, надо выяснить смысл, который можно придать этому (расходящемуся в обычном понимании) интегралу, когда точка z лежит на контуре Γ.

Будем предполагать, что Γ – замкнутая гладкая кривая, точка $z_0 \in \Gamma$. Пусть γ – окружность $|z - z_0| = r$ некоторого малого радиуса r с центром в z_0. Часть кривой Γ, лежащую вне круга $|z - z_0| \leq r$ обозначим через Γ_r. Интеграл

$$I_r = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

имеет смысл в обычном понимании. Если существует $\lim_{r\to 0} I_r = I$, то этот предел называется *интегралом в смысле главного значения* или особым интегралом типа Коши. Он существует при некоторых дополнительных предположениях относительно функции плотности.

Пусть в некоторой точке z_0 контура Γ функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \mu \leq 1$:

- Существует постоянная M такая, что для всех точек $z \in \Gamma$, достаточно близких к z_0, имеет место
$$|f(z) - f(z_0)| \leq M|z - z_0|^{\mu}.$$

Очевидно, условие Гельдера сильнее, чем просто непрерывность.

Для существования интеграла в смысле главного значения при любом $z_0 \in \Gamma$ достаточно потребовать от функции f, чтобы она удовлетворяла условию Гельдера всюду на Γ. Действительно, перепишем наш интеграл в виде

$$\begin{aligned} I_r = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{z - z_0} &= \int_{\Gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz + f(z_0)\int_{\Gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{\Gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz + f(z_0)\oint_{\Gamma_r\cup\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} - f(z_0)\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{\Gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz + 2\pi i f(z_0) - f(z_0)\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0}, \end{aligned}$$

где γ^+ – часть окружности γ, лежащая вне конечной области, ограниченной кривой Γ. Из условия Гельдера следует, что $\left|\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \leq \dfrac{M}{|z - z_0|^{1-\mu}}$. Поэтому существует сходящийся несобственный интеграл

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz = \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz.$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z - z_0} = i\lim_{r\to 0}\int_{\gamma^+} d\varphi = \pi i.$$

В итоге имеем

$$\lim_{r\to 0} I_r = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \pi i f(z_0) + \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz.$$

В случае незамкнутого контура с концами a, b к этому выражению добавляется $f(z_0)\log\dfrac{b - z_0}{a - z_0}$.

Предельные значения интеграла типа Коши. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. *Пусть функция f удовлетворяет в точке $z_0 \in \Gamma$ условию Гельдера, и точка z стремится к z_0 так, что отношение $h = |z - z_0|$ к d (кратчайшему расстоянию z от точек Γ) остается ограниченным. Тогда*

$$\lim_{z \to z_0} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} \, d\zeta = \oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \, d\zeta.$$

Доказательство. Оценим разность между интегралами в левой и правой частях:

$$\Delta = (z - z_0) \oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \, d\zeta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Разобьем интеграл на два, из которых первый идет по дуге c кривой Γ, для точек которой $|\zeta - z_0| \le \delta$ (выбор δ будет сделан позднее), а второй – по оставшейся части $\Gamma' = \Gamma \setminus c$. Оценка первого интеграла:

$$|\Delta_1| \le \int_c \frac{hM|\zeta - z_0|^\mu}{d|\zeta - z_0|} \, |d\zeta| = \frac{hM}{d} \int_c \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_0|^{1-\mu}}.$$

Обозначим через $t = |\zeta - z_0|$ длину хорды, стягивающей дугу $z_0\zeta$ кривой Γ. Отношение длины дуги к длине стягивающей ее хорды ограничено, т.е. $|d\zeta| \le A dt$, и тогда

$$|\Delta_1| \le 2\frac{hMA}{d} \int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\mu}} = \mathrm{const} \cdot \delta^\mu.$$

Отсюда видно, что δ можно выбрать столь малым, чтобы $|\Delta_1|$ не превосходила любого наперед заданного $\varepsilon/2$.

Для $\zeta \in \Gamma \setminus c$ имеем $|\zeta - z_0| \ge \delta$. В предположении, что $|z - z_0| < \delta/2$, получим $|\zeta - z| \ge \delta/2$. Отсюда

$$|\Delta_2| < C\frac{|z - z_0|}{\delta^2},$$

где постоянная C не зависит от z_0 и z. Видим, что для достаточно малых $|z - z_0|$ величина $|\Delta_2|$ также не будет превосходить $\varepsilon/2$. ■

Фиксируем точку $z_0 \in \Gamma$ и перепишем интеграл типа Коши в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{f(z_0)}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

В силу интегральной формулы Коши

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} \, d\zeta + f(z_0), & z \in \mathsf{D} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} \, d\zeta, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{D}, \end{cases}$$

где D – конечная область, ограниченная кривой Γ. Из леммы следует, что при $z \to z_0$ интеграл в правой части стремится к $\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta - z_0}\,d\zeta$. Сравнивая с формулами для интеграла в смысле главного значения (особого интеграла типа Коши), получаем формулы Сохоцкого-Племеля

$$F^{\pm}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} \pm \frac{1}{2}f(z_0),$$

которые выражают граничные значения интеграла типа Коши при стремлении точки z к граничной точке z_0 изнутри (знак $+$) и снаружи (знак $-$). Из них следует, что функция $F(z)$ имеет на контуре Γ скачок

$$F^+(z) - F^-(z) = f(z), \qquad z \in \Gamma,$$

равный функции плотности в данной точке контура.

В важном частном случае, когда контур Γ является вещественной осью, и интеграл типа Коши имеет вид

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)dx}{x - z},$$

формулы Сохоцкого-Племеля можно записать в виде

$$F(x \pm i\epsilon) = \frac{1}{2\pi i}\,\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{t - x} \pm \frac{1}{2}f(x),$$

где считается, что $\epsilon \to 0$. При этом, если функция f вещественно-значная, первое слагаемое в правой части чисто мнимое, а второе - вещественное. Символ P.V. (principal value) перед интегралом означает, что интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{t - x} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(t)dt}{t - x} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(t)dt}{t - x}\right).$$

Подробнее про граничные значения интегралов типа Коши можно почитать в книгах [**?**, **?**].

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.