Листок 2
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ I
ЛАПЛАСИАН И ФОРМУЛА ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ

1. Докажите, эквивалентность формул для Лапласиана на римановом многообразии (M, g)

$$\Delta_g f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f, \quad \Delta_g f = \sum_{i=1}^{\dim M} (-\nabla_{e_i} e_i) f + e_i e_i f,$$

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right), \quad \Delta_g f = tr Hess_g f.$$

Здесь ∇ — связность Леви-Чивита (M, g), $\{e_i\}$ — локальный ортонормированный базис в $\Gamma(TM)$, $\{x^i\}$ – произвольная система локальных координат на M, $|g| = \det g$, $Hess_g f = \nabla df$.

2. Рассмотрим метрику $\tilde{g}$ поточечно конформную метрике g на поверхности Σ, т.е. $\exists\ \omega \in C^\infty(\Sigma)\colon \tilde{g} = e^{2\omega} g$. Докажите, что

$$\Delta_{\tilde{g}} = e^{-2\omega} \Delta g.$$

Верна ли эта формула для многообразий старшей размерности? Ответ обоснуйте.

3. Докажите, что

$$\left[\frac{d\varphi_t}{dt}, d\varphi_t(e_i) \right] = d\Phi \left(\left[\frac{d}{dt}, e_i \right] \right).$$

Здесь $\varphi_t\colon M \to (\bar{M}, \bar{g})$ — семейство погружений, а $\Phi\colon M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to (\bar{M}, \bar{g})$ – соответствующая гомотопия.

4. Обоснуйте, что при выводе формулы первой вариации достаточно использовать лишь нормальные вариации.

5 Решите задачу 3 из листка 1 используя теорему о минимальных подмногообразиях в $\mathbb{E}^n$.