# 3 Лекция 3. Однородные и линейные уравнения. Монодромия

## 3.1 Связь интегральных кривых автономного уравнения и фазовых кривых неавтономного

**Теорема 1** *Фазовые кривые уравнения*

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,y) \\ \dot{y} = G(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

*в области* $F \neq 0$ *являются интегральными кривыми неавтономного уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}, \tag{2}$$

*а в области* $G \neq 0$ *интегральными кривыми неавтономного уравнения*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)}. \tag{3}$$

**Доказательство** Нахождение фазовых кривых системы (1) и интегральных кривых уравнений (2) и (3) - это одна и та же задача. Действительно, фазовая кривая системы (1) в точке $(x,y)$ касается вектора $(F(x,y),\ G(x,y))$. В области $F \neq 0$, этот вектор пропорционален вектору $\left(1, \frac{G(x,y)}{F(x,y)}\right)$, которого касается интегральная кривая уравнения (2). □

## 3.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Так называются уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)}. \tag{4}$$

В области $F = G = 0$ правая часть не определена. В области $F \neq 0$ фазовые кривые системы

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ \dot{y} = G(y) \end{cases} \tag{5}$$

совпадают с интегральными кривыми уравнения (4). Мы умеем решать систему (5), значит умеем решать и уравнение (4).

Более короткий способ решения дается следующим мнемоническим приемом: уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)}$$

в области $FG \neq 0$ заменяем на уравнение

$$\frac{dx}{F(x)} = \frac{dy}{G(y)}$$

и проинтегрируем обе части. Решение уравнения (4) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ задается неявно уравнением:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{F(\xi)} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{G(\eta)}.$$

Это так называемый *метод разделения переменных.*

Обоснование этого метода легко вывести из связи уравнения (**??**) с системой (5). Другое обоснование будет дано в следующих лекциях.

## 3.3 Система Лоттка-Вольтерра

В качестве примера рассмотрим следующую систему “хищник – жертва”:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy \\ \dot{y} = -Cy + Dxy. \end{cases} \tag{6}$$

Эта система описывает динамику популяций, состоящих из двух видов: щуки (хищники, их число $y$) и караси (жертвы, их число $x$).

Мотивировка. В отсутствие щук караси свободно размножаются. Но щуки поедают их тем больше, чем больше есть карасей и щук. В отсутствие карасей щуки вымирают. Но при наличии карасей они размножаются со скоростью, пропорциональной наличию щук и карасей вместе.

Система (6) называется системой Лоттка-Вольтерра и объясняет следующее парадоксальное наблюдение: во время первой мировой войны, когда людям было не до карасей, и их перестали ловить, число карасей *уменьшилось*, а щуки расплодились.

Объяснение таково. Рассмотрим неавтономное уравнение, соответствующее системе (6) (все коэффициенты для простоты считаем единицами):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}.$$

Отсюда

$$\frac{(1-y)dy}{y} = \frac{(x-1)dx}{x}$$

или

$$x - \ln x + y - \ln y = const.$$

Функция $x - lnx$ выпукла вниз и стремится к $+\infty$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$.

Факт из анализа: сумма двух таких функций - одна от $x$, другая от $y$, в качестве линий уровня имеет замкнутые выпуклые кривые. Фазовый портрет уравнения Лоттка-Вольтерра изображен на рис. 4.6 книги: первый квадрант заполнен концентрическими замкнутыми кривыми, окружающими положение равновесия $(1,1)$.

Парадоксальное наблюдение, упомянутое выше, объясняется рассмотрением этого фазового портрета.

## 3.4 Однородные уравнения

Однородными называются уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = F\left(\frac{x}{t}\right) \tag{7}$$

Легко доказать следующее предложение:

**Предложение 1** *Поле направлений уравнения* (7) *не меняется при растяжении* $t \mapsto \lambda t$, $x \mapsto \lambda x$. *Следовательно, если* $t = t(\tau)$, $x = x(\tau)$ *— интегральная кривая уравнения* (7) *и* $\lambda \neq 0$, *то* $t = \lambda t(\tau)$, $x = \lambda x(\tau)$ *— также интегральная кривая этого уравнения.*

Предложение 1 показывает, что у нашего уравнения есть *симметрия* — семейство отображений $(t,x) \to (\lambda t, \lambda x)$, которые сохраняют множество интегральных кривых.

В области $t \neq 0$ введем координаты $(t,u)$, где $u = \frac{x}{t}$. Тогда для любого решения $x(t)$ исходного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(u),$$

причем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(ut)}{dt} = u + t\frac{du}{dt}.$$

В последнем равенстве выражение $du/dt$ — это производная функции $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ по $t$. Итак,

$$\frac{du}{dt} = \frac{F(u) - u}{t}.$$

Метод разделения переменных даёт

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{dv}{F(v) - v} = \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\tau} = \ln|t| - \ln|t_0|.$$

Мы получили неявную формулу для функции $u(t)$. Найдя функцию $u(t)$, легко найти и функцию $x(t) = u(t)t$.

Таким образом, однородные уравнения мы тоже научились решать. Оказывается, что *наличие симметрии позволяет уменьшить число уравнений в системе, а если их было два — решить их.*

## 3.5 Линейные однородные уравнения на прямой

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = a(t)x, \ a \in C^0(I), \ x \in \mathbb{R}^1 \tag{8}$$

Оно равносильно уравнению

$$(\ln x)^{\cdot} = a(t).$$

Следовательно,

$$x(t) = Ce^{A(t)}, \text{ где } A' = a \tag{9}$$

($A$ - первообразная от $a$, определенная с точностью до аддитивной константы). Если $A(t_0) = 0$, то

$$x(t) = e^{A(t)} x(t_0).$$

## 3.6 Линейные неоднородные уравнения на прямой

Начнем со следующего простого предложения.

**Предложение 2** *Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:*

$$x_{\textit{общ}}(t) = x_{\textit{част}}(t) + C\varphi(t), \tag{10}$$

*где $\varphi(t)$ — решение однородного уравнения (8), $x_{\textit{част}}$ — частное решение (то есть какое-то одно решение) неоднородного уравнения.*

Это предложение является частным случаем чрезвычайно общего факта: *пространство решений линейного неоднородного уравнения любой природы: алгебраического, обыкновенного дифференциального, в частных производных и т. д. является аффинным пространством, с которым ассоциировано пространство решений соответствующего линейного однородного уравнения.*

Другими словами, *общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.*

## 3.7 Метод вариации постоянной

Любое решение однородного линейного уравнения имеет вид $C\varphi(t)$, где $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau}$.

Будем подбирать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$x_{\text{част}}(t) = C(t)\varphi(t), \text{ где } x_{\text{част}}(t_0) = 0$$

— *проварьируем* постоянную $C$. Мы получаем следующее уравнение на функцию $C(t)$:

$$\dot{C}(t)\varphi(t) + C(t)\dot{\varphi}(t) = a(t)C(t)\varphi(t) + b(t), \quad C(t_0) = 0. \tag{11}$$

Но функция $\varphi$ удовлетворяет однородному уравнению:

$$\dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t),$$

откуда

$$\dot{C}(t)\varphi(t) = b(t).$$

Следовательно,

$$\dot{C}(t) = \varphi(t)^{-1}b(t), \quad C(t_0) = 0.$$

Частное решение $x_{\text{част}}(t)$ неоднородного уравнения находится теперь с помощью теоремы Ньютона—Лейбница. Более подробно,

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau;$$

итак, частное решение линейного неоднородного уравнения равно

$$x_{\text{част}}(t) = \varphi(t)C(t) = \varphi(t)\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau. \tag{12}$$

В силу предложения 2, общее решение неоднородного уравнения равно

$$x_{\text{общ}}(t) = x_{\text{част}}(t) + C\varphi(t).$$

Окончательно,

$$x_{\text{общ}}(t) = \left(C + \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)^{-1}b(\tau)d\tau\right)\varphi(t),$$

где $\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$.

Из этой формулы, в частности, следует, что решения линейных уравнений определены на всей области определения его коэффициентов.