

Линейные и аффинные преобразования

ГС2♦1. Напишите в стандартном базисе матрицу линейного преобразования плоскости \mathbb{R}^2 :

- а) гомотетии с коэффициентом λ центром в точке ноль
- б) поворота на угол φ вокруг нуля
- в) проекции на первую ось параллельно второй
- г) проекции на прямую заданную уравнением $x_1 - x_2 = 0$ параллельно прямой $x_2 = 0$

ГС2♦2. На аффинной плоскости задан $\triangle abc$. Как связаны друг с другом координаты произвольной точки относительно реперов $(a; \overline{ab}, \overline{ac})$ и $(b; \overline{ba}, \overline{bc})$?

ГС2♦3. Зафиксируем на аффинной плоскости две точки $p \neq q$. Является ли аффинным отображение, переводящее каждую точку x в равновесный барицентр точек p, q, x ? Есть ли у этого отображения неподвижные точки?

ГС2♦4. Существует ли аффинное преобразование вещественной прямой \mathbb{R}^1 , переводящее

- а) точки 5, 6, 7 соответственно в точки 2, 3, 4
- б) точки 1, 2, 3 соответственно в точки $-2, -1, 4$
- в) точки 1, $-2, 3$ соответственно в точки $-2, 3, 1$?

ГС2♦5. Существует ли аффинное преобразование плоскости \mathbb{Q}^2 , переводящее

- а) точку $(1, -2)$ в точку $(0, 10)$, а прямые $10x_1 - 4x_2 = 1$ и $3x_1 - 3x_2 = -7$ — соответственно, в прямые $x_1 - 2x_2 = -3$ и $x_1 - x_2 = 6$
- б) прямые $x_1 = 0, x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 1$ в прямые $x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 = 1$
- в) прямые $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 = x_2$ и $x_1 = 2x_2$ в $x_1 = x_2, x_1 = 2x_2, x_1 = 3x_2$ и $x_1 = 4x_2$?

Если да, опишите такое преобразование явной формулой вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

если нет, объясните почему.

ГС2♦6. Найдите образ точки $(-2, -8)$ при аффинном преобразовании плоскости \mathbb{R}^2 , переводящем точки $(-2, -2), (1, -5), (-5, 4)$ соответственно в точки $(-8, 3), (7, 3), (-20, 15)$.

ГС2♦7. Для всех аффинных преобразований из предыдущих двух задач выясните, есть ли у этого преобразования а) неподвижная точка б) неподвижная прямая¹ в*) инвариантная прямая². Если да, то укажите все такие точки и прямые явно, если нет, объясните почему.

ГС2♦8. Ответьте на три вопроса из предыдущей задачи для аффинного преобразования

- а) действующего по правилу $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 2x_2 + 2, 2x_1 - x_2 + 2)$
- б) переводящего точки $(-1, 2), (2, 1), (1, -1)$ в точки $(-3, 0), (6, 2), (10, -1)$
- в) переводящего вершины $\triangle abc$ в точки $\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c, \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$ и $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$.

ГС2♦9. Опишите аффинное преобразование $\varphi \circ \gamma_{p,\lambda} \circ \varphi^{-1}$, где $\gamma_{p,\lambda}$ — гомотетия с центром в точке p и коэффициентом λ , а φ — произвольное биективное аффинное преобразование.

ГС2♦10. Какой бывает композиция двух гомотетий с разными центрами?

ГС2♦11. Покажите, что аффинное преобразование, переводящее каждую прямую в параллельную ей или совпадающую с ней прямую, является либо параллельным переносом, либо гомотетией.

¹Т. е. прямая, каждая точка которой неподвижна.

²Т. е. прямая, которая переводится преобразованием в себя. Обязательно вспомните про эту задачу в ноябре!