4 Лекция 4. Линейные периодические и пфаффовы уравнения

4.1 Линейные уравнения с периодическими коэффициентами: преобразование монодромии

Рассмотрим линейное неавтономное уравнение с периодическими коэффициентами и общим периодом T. Определим “преобразование монодромии M за период”. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t, x_0)$ - решение уравнения

$$\dot{x} = a(t)x + b(t),\ a(t+T) \equiv a(t),\ b(t+T) \equiv b(t) \tag{1}$$

с начальным условием $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Тогда преобразование M определяется как

$$M(x_0) = \varphi(T, x_0). \tag{2}$$

Предложение 1 *Преобразование монодромии M аффинно:*

$$M(x) = Ax + B,$$

причем

$$\ln A = \int_0^T a(t)dt. \tag{3}$$

Доказательство Пусть $\psi(t)$ - частное решение уравнения (1), а

$$\varphi_{\text{одн}}(t) = \varphi_{\text{одн}}(0)e^{\int_0^t a(\tau)d\tau}$$

- общее решение однородного уравнения. Тогда, если $\varphi_{\text{одн}}(0) = x$, то

$$\varphi_{\text{одн}}(T) = Ax,$$

где A то же, что в (3). Пусть $\varphi(t)$ - решение с начальным условием $\varphi(0) = x$, $\psi(t)$ - решение с начальным условием $\psi(0) = 0$. Тогда

$$\varphi(T) = \psi(T) + \varphi_{\text{одн}}(T) = \psi(T) + Ax.$$

Следовательно,

$$M(x_0) = \psi(T) + Ax,$$

где A дается формулой (3). $\square$

Заметим, что метод вариации постоянных, рассказанный в прошлой лекции, позволяет нам вычислить явно $B = \psi(T)$.

4.2 Линейные уравнения с периодическими коэффициентами: периодические решения

Начальные условия периодических решений - это неподвижные точки преобразований монодромии.

Что можно сказать о неподвижных точках произвольного аффинного отображения прямой, сохраняющего ориентацию:

$$M\colon x \mapsto Ax + B,$$

где $A > 0$?

1. Общий случай: $A \neq 1$.

   В этом случае преобразование M — растяжение с коэффициентом A относительно неподвижной точки $x_0 = \frac{B}{1-A}$.

2. Вырожденный случай: $A = 1$. В этом случае $M : x \mapsto x + B$ — перенос.

   (a) Невырожденный (типичный) перенос: $B \neq 0$. Неподвижных точек нет.

   (b) Вырожденный перенос: $B = 0$. Преобразование M тождественно, и все точки неподвижны.

Теорема 1 *Линейное одномерное дифференциальное уравнение с непрерывными T-периодическими коэффициентами имеет единственное T-периодическое решение, если и только если интеграл по периоду от коэффициента при линейном члене отличен от нуля:*

$$\int_0^T a(t)dt \neq 0.$$

Доказательство Преобразование монодромии уравнения (1) аффинно и имеет вид

$$x \mapsto Ax + B, \quad \text{где } A = e^I, \; I = \int_0^T a(t)dt$$

. Оно имеет единственную неподвижную точку, если и только если $A \neq 1$, т.е. $I \neq 0$. □

Эта теорема позволяет легко узнавать уравнения вида (1) с единственным периодическим решением. Она же позволяет исследовать периодические решения уравнения (1) даже тогда, когда интегралы, выражающие его решение, не берутся.

4.3 Пример исследования периодического решения

Проблема 1 *При каких a уравнение*

$$\dot{x} = (\sin t - a)x + \cos t \tag{4}$$

имеет хотя бы одно 2π-периодическое решение?

Решение. По теореме 1, при $a \neq 0$ периодическое решение единственно. При $a = 0$ решение с начальным условием $\varphi(0) = 0$ имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{-\cos t}\int_0^t (\cos\tau)e^{\cos\tau}d\tau.$$

Следовательно,

$$\varphi(2\pi) = e^{-\cos t}\int_0^{2\pi} (\cos t)e^{\cos t}dt.$$

Посмотрев на график подинтегральной функции, можно убедиться, что $\varphi(2\pi) \neq 0$. Преобразование монодромии уравнения (4) имеет вид

$$M(x) = x + \varphi(2\pi)).$$

Это нетождественный сдвиг. Периодических решений нет.

4.4 Дифференциальные 1-формы на плоскости

Определение 1 1-*форма на линейном пространстве - это линейный функционал на этом пространстве. На двумерном пространстве T с кооординатами dx, dy она имеет вид*

$$adx + bdy \in T^*.$$

Определение 2 *Дифференциальная* 1-*форма на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - это отображение*

$$\omega : (x, y) \mapsto \omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy \in T^*_{(x,y)}.$$

Множество нулей дифференциальной формы $adx + bdy$ при $a^2 + b^2 \neq 0$ - это прямая $dy = -\frac{a}{b}dx$ или $dx = -\frac{b}{a}dy$.

4.5 Пфаффовы уравнения

Пусть $\omega - 1$- форма на плоскости:

$$\omega(x, y) = f(x, y)dx + g(x, y)dy. \tag{5}$$

Уравнение

$$\omega = 0 \tag{6}$$

называется пфаффовым уравнением. Его интегральные кривые - это кривые, касающиеся в каждой своей точке (x, y) множества нулей формы ω, если $\omega(x, y) \neq 0$. Точки, в которых $\omega = 0$, называются особыми.

Предложение 2 *Интегральные кривые уравнения* (6), (5) *- это интегральные кривые любого из дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f}{g}(x, y), \ \frac{dx}{de} = -\frac{q}{f}(x, y).$$

Доказательство Направление поля $\omega = 0$ в точке (x, y) имеет наклон к оси x, равный $-\frac{f}{g}(x, y)$, и к оси y, равный $-\frac{g}{f}(x, y)$. □

4.6 Замкнутые и точные формы

Определение 3 1- *форма* (5) *называется* замкнутой, *если*

$$f_y = g_x,$$

и точной, *если существует функция, называемая потенциалом, такая что*

$$\omega = dF.$$

Всякая точная 1-форма с C^2-гладким потенциалом замкнута. Это следует из теоремы о равенстве смешанных производных.

4.7 Уравнения в полных дифференциалах

Так называются пфаффовы уравнения (6), в которых форма ω точна.

Теорема 2 *Интегральные кривые уравнения $\omega = 0$ для точной формы ω - это линии уровня ее потенциала.*

Доказательство Пусть $\omega = dF$. Тогда уравнение $\omega = 0$ примет вид:

$$F_x dx + F_y dy = 0.$$

По теореме о неявной функции, наклон линии уровня F, проходящей через точку (x, y) к оси x равен $-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$, а к оси y равен $-\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}$ в областях, где знаменатели не равны нулю. □

4.8 Обоснование метода разделения переменных

Интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(y)}{F(x)} -$$

это интегральные кривые пфаффова уравнения

$$\omega = \frac{dx}{F(x)} - \frac{dy}{G(y)} = 0$$

в области $FG \neq 0$. Это уравнение - в полных дифференциалах: если

$$f' = \frac{1}{F},\ g' = -\frac{1}{G},$$

то

$$\omega = d(f(x) + g(y)).$$