Пример В первой урне 4 белых и 7 красных шаров, во второй — только белые, в третьей — только красные. Вынимаем шар наугад.

$\mathbb{P}$(вынули красный) = ?

$$\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(K \mid Y_1)\,\mathbb{P}(Y_1) + \mathbb{P}(K \mid Y_2)\,\mathbb{P}(Y_2) + \mathbb{P}(K \mid Y_3)\,\mathbb{P}(Y_3)$$

вынули красный; выбрали урну 1; вер-ть выбрать $Y1$.

$\mathbb{P}(Y_i) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(K \mid Y_1) = \frac{7}{11}$, $\mathbb{P}(K \mid Y_2) = 0$, $\mathbb{P}(K \mid Y_3) = 1$.

$$\mathbb{P}(K) = \frac{7}{11} \cdot \frac{1}{3} + 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{18}{33}}$$

Лекция 2 | 14.09.2023

1. Построение вероятностного пр-ва для эксперимента из N независимых испытаний

Имеем N экспериментов, возможно, разных. Для каждого имеется своё вероятностное пр-во $(\Omega_i, \mathbb{P}_i)$, $1 \leq i \leq N$.

Как построить вероятностное пр-во $(\Omega, \mathbb{P})$ для эксперимента, состоящего из последовательного независимого проведения этих N экспериментов?

Например, $\Omega_i = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}_i(0) = \mathbb{P}_i(1) = \frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq N$.

То есть, мы N раз бросаем симметричную монету.

Чтобы вычислить $\mathbb{P}$(все N раз выпали орлы), нужно завести указанное вероятностное пр-во $(\Omega, \mathbb{P})$.

$$\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_N, \quad \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_N, \text{ то есть}$$

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N), \quad \omega \in \Omega,\ \omega_i \in \Omega_i$$

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdots \mathbb{P}_N(\omega_N).$$

Ясно, что $\mathbb{P}(\omega) \geq 0$ и $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum\limits_{\omega_1 \in \Omega_1} \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdots \sum\limits_{\omega_N \in \Omega_N} \mathbb{P}_N(\omega_N) = 1$,

так что $\mathbb{P}$ — вероятность.

Независимость экспериментов означает, что $\forall\ B_j \subset \Omega_j$, события $A_j = \{\omega \in \Omega : \omega_j \in B_j\}$, $1 \le j \le N$, независимы в совокупности.

Мы проверим только попарную независимость.

$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \overset{?}{=} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$.

$$\mathbb{P}(A_i) = \sum_{\omega \in A_i} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\substack{\omega_k \in \Omega_k,\ k \ne i \\ \omega_i \in B_i}} \mathbb{P}_1(\omega_1) \dots \mathbb{P}_N(\omega_N) = \sum_{\omega_i \in B_i} \mathbb{P}_i(\omega_i) = \mathbb{P}_i(B_i).$$

Аналогично, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}_i(B_i)\,\mathbb{P}_j(B_j)$.

Итого, A_i и A_j действительно независимы.

Пример 1. Если $\Omega_i = \{0, 1\}$, $1 \le i \le N$, $\hat{\mathbb{P}}_i(0) = p$, $\hat{\mathbb{P}}_i(1) = 1 - p$, $\forall i$.

— N бросков несимметричной монеты с вероятностью орла равной p,

то $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N),\ \omega_j = 0, 1\}$

$$\mathbb{P}(\omega) = (1-p)^{\underbrace{\sum_i \omega_i}_{\text{число решек}}}\ p^{\underbrace{N - \sum \omega_i}_{\text{число орлов}}}.$$

2. Случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathbb{P})$ — вероятностное пр-во и, как всегда, Ω не более, чем счётно.

Опр 3 Функция $\xi : \Omega \to X$ (множество) называется X-значной случайной величиной.

Обычно у нас будет $X = \mathbb{R}$.

Пример 3 N раз независимо бросаем монетку с вероятностью выпадения орла равной $0 \le p \le 1$ и решки равной $q := 1-p$.

$$\Omega = \{ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N), \quad \omega_j = \underset{\text{орел}}{0}, \underset{\text{решка}}{1} \}.$$

Пусть $\eta(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i$

— число выпавших решек. Тогда $N - \eta(\omega)$ — число выпавших орлов.

Пусть $\xi : \Omega \to X$ — случайная величина.
Заметим, что $\xi(\Omega)$ — не более, чем счётное множество.

Обозначим для $a \in \xi(\Omega)$ $p_a := \mathbb{P}(\{\omega : \xi(\omega) = a\}) = \mathbb{P}(\xi = a)$.

сокращённое обозначение.

Ясно, что $\sum_{a \in \xi(\Omega)} p_a = 1$.

Опр 4 Набор пар $(a, p_a)_{a \in \xi(\Omega)}$ называется распределением случайной величины ξ.

В примере выше η имеет распределение $\left(k, C_N^k q^k p^{N-k}\right)_{0 \le k \le N}$

На практике нас очень редко интересует структура вероятностного пространства $(\Omega, \mathbb{P})$ и устройство функции $\xi : \Omega \to X$, а интересует лишь распределение случайной величины ξ.

Опр 5 Случайные величины $\xi, \eta : \Omega \to X$, определенные на одном и том же вероятностном пр-ве $(\Omega, \mathbb{P})$, называются независимыми, если

$$\forall A, B \subset X, \qquad \mathbb{P}(\xi \in A, \eta \in B) = \mathbb{P}(\xi \in A)\, \mathbb{P}(\eta \in B).$$

Другими словами, события $\underset{\{\omega : \xi(\omega) \in A\}}{\{\xi \in A\}}$ и $\{\eta \in B\}$ — независимы $\forall A, B \subset X$.

Независимость в совокупности определяется аналогично

Пример 6 • Число орлов и число решек за N бросков — зависимы.

• Число орлов за первые 3 броска и за следующие 3 броска — независимы.

•

ξ / η	0	1	2	
2	$1/8$	$1/12$	$1/8$	$\}\ \frac{1}{3}$
-1	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$\}\ \frac{1}{3}$
5	$1/8$	$1/12$	$1/8$	$\}\ \frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

ξ, η — зависимы: $\underbrace{\mathbb{P}(\xi=0, \eta=2)}_{=\frac{1}{8}} \neq \underbrace{\mathbb{P}(\xi=0)}_{=\frac{1}{3}} \underbrace{\mathbb{P}(\eta=2)}_{=\frac{1}{3}}$.

Для определения зависимости/независимости мы использовали только распределение случайного вектора (ξ, η) и случайных величин ξ, η, но не их явную конструкцию как функций $\xi, \eta: \Omega \to \mathbb{R}$.

Задача. Пусть $\xi, \eta: \Omega \to \mathbb{R}$ — независимы. Верно ли, что всегда а) $\xi + const$, η — независимы? б) $\xi+\eta$, η — независимы?

3. Характеристики случайных величин

Пусть $\xi: \Omega \to \mathbb{R}^n$ — случайная величина.

Опр 7 Математическим ожиданием случайной величины ξ называется вектор

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega)\xi(\omega) = \sum_{a \in \xi(\Omega)} \underbrace{\mathbb{P}(\xi = a)}_{p_a} a.$$

$\boxed{\text{Упражнение}}$

Пример 8 • Если $(\Omega, \mathbb{P})$ такое, что $|\Omega| < \infty$, а $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ (классическое определение вероятности), то $\mathbb{E}\xi = \frac{\sum \xi(\omega)}{|\Omega|}$ — среднее значение ξ.

• Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — случайный вектор из примера 6. То(гда)

$$\mathbb{E}\zeta = (0,2)\cdot\frac{1}{8} + (1,2)\cdot\frac{1}{12} + (2,2)\cdot\frac{1}{8} + (0,-1)\cdot\frac{1}{12} + \ldots$$

Это мат. ожидание можно вычислить проще:

$$\mathbb{E}\zeta = (\mathbb{E}\xi, \mathbb{E}\eta) = \left(\frac{0+1+2}{3}, \frac{2-1+5}{3}\right) = (1, 2).$$

Св-ва мат. ожидания:

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta.$ $\quad$ это не очевидно
- $\xi \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}\xi \geq 0$
- $\mathbb{E}\,\mathrm{const} = \mathrm{const}$
- Если ξ, η независимы, то $\mathbb{E}\xi\eta = \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta.$

Задача Верно ли обратное?

Опр 9 Дисперсией действительнозначной случайной величины $\xi: \Omega \to \mathbb{R}$ называется число

$$\mathrm{Var}\,\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2.$$

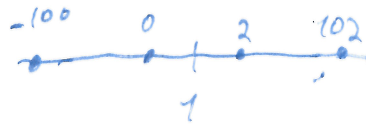
$$\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\left(\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2\right) = \mathbb{E}\xi^2 - 2\underbrace{\mathbb{E}(\xi\mathbb{E}\xi)}_{\mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\xi} + (\mathbb{E}\xi)^2$$

Также дисперсия называется среднеквадратичным отклонением.

Пример

ξ	0	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

η	-100	102
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 1$, но $\mathrm{Var}\,\xi = 2 - 1 = 1$, $\mathrm{Var}\,\eta = \frac{100^2 + 102^2}{2} - 1.$

Свойства дисперсии

- $\mathrm{Var}\, c\xi = c^2\,\mathrm{Var}\,\xi$
- $\mathrm{Var}\,\xi = 0 \Leftrightarrow \exists c: \; \mathbb{P}(\xi = c) = 1.$
- $\mathrm{Var}\,\xi \geq 0$
- Вообще говоря, $\mathrm{Var}(\xi + \eta) \neq \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta.$

  Но если ξ, η – независимы, то $\boxed{\mathrm{Var}(\xi+\eta) = \mathrm{Var}\,\xi + \mathrm{Var}\,\eta}$

Опр 10
- Ковариацией случайных величин $\xi, \eta: \Omega \to \mathbb{R}$ называется число

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) \underset{\text{упражнение}}{=} \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta.$$

В частности, $\mathrm{cov}(\xi, \xi) = \mathrm{Var}\,\xi.$

- Коэффициентом корреляции ξ, η называется число

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,\xi}\,\sqrt{\mathrm{Var}\,\eta}}$$

Св-ва:
- $0 \le r_{\xi,\eta} \le 1$
- ξ, η — независимы $\Rightarrow$ $cov(\xi,\eta) = r_{\xi,\eta} = 0$.
- $\xi = a\eta + b \Leftrightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$.

$E(uv)$ — скалярное произведение на пр-ве с.в., удовлетворяющих $E\,u = 0$ $\Rightarrow$ $E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) \le \sqrt{Var\,\xi}\sqrt{Var\,\eta}$ (Коши-Буняковский)

аналогично.

Задача: Покажите, что, вообще говоря, $cov(\xi,\eta) = 0 \not\Rightarrow \xi, \eta$ — независимы.

Решение:

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

X, Y — независимы, $Z = XY$.

$cov(X, Z) = 0$, но X и Z — не независимы.