## 2. Лекция 2. Действия групп Ли. Однородные пространства.

### 2.1. **Действия групп Ли на многообразиях.**

**Определение 2.1.** (Левое) действие группы Ли $G$ на гладком многообразии $X$ это (левое) действие $G$ на $X$ как на множестве такое, что отображение

$$\alpha : G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x$$

является гладким.

**Примеры.**

(1) Группа $G$ естественно действует на себе умножениями слева, справа и сопряжениями:

$$g \cdot h = L_g h := gh,$$
$$g \cdot h = R_{g^{-1}} h := hg^{-1},$$
$$g \cdot h = L_g \circ R_{g^{-1}} h = ghg^{-1}.$$

(2) Любой гомоморфизм $\varphi : G \to H$ определяет действие $G$ на $H$ по правилу

$$g \cdot h = \varphi(g)h.$$

Для любого $x \in X$ определим отображение $\alpha_x : G \to X, g \mapsto g \cdot x$.

**Лемма 2.2.** Отображение $\alpha_x$ – гладкое и имеет постоянный ранг.

*Доказательство.* Отображение $\alpha_x$ гладко как ограничение отображения $\alpha$ на $G \times \{x\}$. Для любого $g \in G$ определим $L_g : G \to G, x \to gx$ и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L_g} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_x} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_x} \\ X & \xrightarrow{g\cdot} & X \end{array}$$

Отображения $L_g$ и $g\cdot$ – диффеоморфизмы, так что ранг $\alpha_x$ в точке $h$ равен рангу $\alpha_x$ в точке $gh$, что и требовалось доказать. □

**Следствие 2.3.** Любая группа Ли $G$ *параллелизуема*, то есть её касательное расслоение тривиально (**??**).

*Доказательство.* Рассмотрим левое действие группы Ли $G$ на себе. Касательное пространство $T_gG$ отождествляется с касательным пространством $T_eG$ в единице группы при помощи отображения $d_eL_g$. Это задаёт тривиализацию касательного расслоения $TG$. □

Как следствие, на двумерной сфере $S^2$ не существует структуры группы Ли. Из леммы 2.2 и свойств отображений постоянного ранга (2.11), получаем следующую теорему.

**Теорема 2.4.** Пусть группа Ли $G$ действует на многообразии $X$. Тогда

(1) Для любой $x \in X$ стабилизатор $G_x$ является подгруппой Ли коразмерности $\operatorname{rk} \alpha_x$, причём $T_e(G_x) = \operatorname{Ker} d_e\alpha_x$.
(2) Для любой малой окрестности $O(e)$ единицы $e \in G$ множество $O(e) \cdot x$ является подмногообразием многообразия $X$, $\dim O(e) \cdot x = \operatorname{rk} \alpha_x$ и $T_x(O(e) \cdot x) = \operatorname{Im} d_e\alpha_x$.
(3) Если орбита $Gx$ является подмногообразием в $X$, то $\dim Gx = \operatorname{rk} \alpha_x$.

**Замечание 2.5.** Отметим, что орбита не всегда является локально-замкнутым подмногообразием, см. пример обмотки тора, где образ, орбита единицы, не является локально-замкнутым подмногообразием. Тем не менее, она всегда является вложенным подмногообразием, что будет показано ниже.

**Примеры.**

(1) Группа
$$O_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^T = E\}$$
является подгруппой Ли $GL_n(\mathbb{C})$, как стабилизатор единицы действия $GL_n(\mathbb{C})$ на пространстве симметрических матриц (= симметрических билинейных форм) по правилу
$$\Gamma \to A\Gamma A^T.$$

Орбиты этого действия дают классификацию симметрических билинейных форм. Орбит $n+1$ штука и их можно описать так:
$$GL_n(\mathbb{C}) \cdot \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{i}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-i}),$$
где $i = 0, \dots, n$.

(2) Группа
$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = E\}$$
является подгруппой Ли $GL_n(\mathbb{R})$, как стабилизатор единицы действия $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве симметрических матриц (= симметрических билинейных форм) по правилу
$$\Gamma \to A\Gamma A^T.$$
Аналогично группа
$$O_{p,q}(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AJA^T = J\}, J = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q})$$
является подгруппой Ли $GL_n(\mathbb{R})$, как стабилизатор матрицы $J$ при том же действии группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$. Орбиты этого действия дают классификацию симметрических билинейных форм. Орбит $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ штук и их можно описать так:
$$GL_n(\mathbb{R}) \cdot \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q}, \underbrace{0, \dots, 0}_{r}),$$
где $p + q + r = n$.

(3) Группа
$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = E\}$$
является *вещественной* подгруппой Ли вещественной группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$ как стабилизатор единицы при действии на пространстве эрмитовых ($A = A^*$) матриц по правилу
$$\Gamma \to A\Gamma A^*.$$

Аналогично группы
$$U_{p,q} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AJA^T = J\}, J = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q})$$
является вещественной подгруппой Ли вещественной группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$, как стабилизатор матрицы $J$ при том же действии группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$. Заметим, что это действие не является комплексно аналитическим, так что мы не можем утверждать, что $U_n$ – комплексная подгруппа Ли $GL_n(\mathbb{C})$.

Орбиты этого действия дают классификацию симметрических эрмитовых форм. Орбит $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ штук и их можно описать так:
$$GL_n(\mathbb{C}) \cdot \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q}, \underbrace{0, \dots, 0}_{r}),$$
$$p + q + r = 1.$$

(4) Группа

$$Sp_{2n}(\Bbbk) = \{A \in M_{2n}(\Bbbk) \mid AJA^T = J\}, J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

где $E$ – единичная $n \times n$ матрица, является подгруппой Ли группы $GL_{2n}(\Bbbk)$, как стабилизатор $J$ при действии $GL_{2n}(\Bbbk)$ на пространстве кососимметрических матриц по тому же правилу, что и в пункте 1. Орбиты этого действия дают классификацию кососимметрических билинейных форм, их $n+1$ штука и их можно описать так:

$$GL_n(\Bbbk) \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $E_k$ – единичная $k \times k$ матрица, $k = 0, \dots, n$.

(5) Группа Ли действует на себе умножениями слева, справа и сопряжениями. В первых двух случаях действие транзитивно, а стабилизаторы тривиальны. В последнем случае орбиты – это классы сопряжённости, а стабилизаторы – централизаторы элементов группы. В частности отсюда следует, что централизатор элемента группы Ли является подгруппой Ли.

**Предложение 2.6.** Ядро гомоморфизма групп Ли является нормальной подгруппой Ли.

*Доказательство.* Напомним, что любой гомоморфизм $\varphi : G \to H$ определяет действие $G$ на $H$. Тогда ядро есть подгруппа Ли как стабилизатор единицы группы $H$. □

## Однородные пространства.

Пусть $H$ – подгруппа Ли группы $G$. Рассмотрим множество (левых) смежных классов $G/H$. Группа $G$ действует на $G/H$ по правилу $g \cdot (g'H) = (gg')H$. Наша цель – ввести структуру гладкого многообразия на $G/H$ таким образом, чтобы действие $G$ на $G/H$ было гладким и показать, что такая структура единственна.

**Определение 2.7.** Пусть $X, Y$ – гладкие многообразия. Сюръективное отображение $p : Y \to X$ называется *факторизацией*, если

(1) $U \subset X$ открыто тогда и только тогда когда $p^{-1}(U) \subset Y$ открыто.
(2) Для любого открытого $U \subset X$ функция $f : U \to \Bbbk$ гладкая тогда и только тогда когда $p^*f := f \circ p$ – гладкая.

Если $p : Y \to X$ – факторизация, то на уровне топологических пространств $X \simeq Y/\sim$, где $y_1 \sim y_2$ тогда и только тогда, когда $p(y_1) = p(y_2)$.

**Примеры.** 1) Пусть $X, Z$ – гладкие многообразия и пусть $Y = X \times Z$. Тогда отображение $\mathrm{pr}_X : Y \to X$ – это факторизация. Отображение $p$ называют тривиальным расслоением.
2) Локально тривиальное расслоение является факторизацией.

**Предложение 2.8.** Пусть $X, Y, Z$ – гладкие многообразия, $p : Y \to X$ – факторизация и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \\ & X \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Тогда $\varphi$ является гладким тогда и только тогда, когда $\psi$ является гладким.

*Доказательство.* Заметим, что $\psi$ – гладкое тогда и только тогда, когда $\psi^* f$ – гладкое для любой гладкой $f : Z \to \Bbbk$, так как в качестве $f$ можно взять координатные функции в данной карте многообразия $Z$.

Из того, что $p$ – факторизация, получаем, что $\psi^* f$ гладко тогда и только тогда, когда $p^*\psi^* f = \varphi^* f$ – гладко, что равносильно гладкости $\varphi$. $\square$

Понятие факторизации проясняет следующее наблюдение: если $Y$ – гладкое многообразие, $X$ – множество и $p : Y \to X$ – сюръективное отображение, то на $X$ существует не более одной структуры гладкого многообразия такой, что отображение $p$ – факторизация. Это следует из Предложения 2.8: если $\varphi$ тоже факторизация и $\psi$ – биекция, то $\psi$ – диффеоморфизм.

**Теорема 2.9.** Пусть $G$ – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа Ли. Тогда на множестве $G/H$ левых смежных классов существует единственная структура гладкого многообразия при которой отображение

$$p : G \to G/H, g \mapsto gH$$

является факторизацией. При этом:

- $\dim G/H = \dim G - \dim H$;
- Отображение $p$ – локально тривиальное расслоение;
- Действие $G$ на $G/H$ – гладкое действие на гладком многообразии;
- Если $H$ – нормальная подгруппа, то $G/H$ является группой Ли.

## Аппендикс. Гладкие многообразия.

**Определение 2.10.** Пусть $X, Y$ – многообразия и $f : X \to Y$ – гладкое отображение. Говорят, что $f$ – отображение постоянного ранга, если $\operatorname{rk} d_x f$ одинаков для любого $x \in X$.

**Теорема 2.11.** Пусть $f : X \to Y$ – отображение постоянного ранга $r$. Тогда

(1) Для любой $y \in \operatorname{Im} f$ полный прообраз $f^{-1}(x)$ является гладким подмногообразием $X$ коразмерности $r$, причём $T_x(f^{-1}(y)) = \operatorname{Ker} d_x f$.

(2) Для любой $x \in X$ существует окрестность $O(x)$ точки $x$ такая, что $f(O(x))$ – локально-замкнутое подмногообразие в $Y$ размерности $r$, причём $T_{f(x)}(f(O(x))) = \operatorname{Im} d_x f$.