

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2023  
ЛИСТОК 2

1. Докажите, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \delta^{(\varepsilon)}(x) f(x) dx = f(0)$  для любой бесконечно дифференцируемой функции  $f$  для следующих функций:

$$\text{а) } \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \text{б) } \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon}, \quad \text{в) } \delta^{(\varepsilon)}(x) = \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x}.$$

2. Докажите, что в смысле обобщенных функций

$$x\delta(x) = 0, \quad \text{но } x\delta'(x) = -\delta(x) \neq 0.$$

3. Для любой регулярной функции  $a(x)$  докажите тождество

$$a(x)\delta'(x) = a(0)\delta'(x) - a'(0)\delta(x).$$

4. Пусть  $f(x)$  – дифференцируемая функция с простыми нулями в точках  $x_i$ . Определим обобщенную функцию  $\delta(f)$  равенством

$$(\delta(f), \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon^{-1} \int_{0 < f(x) < \varepsilon} \varphi(x) dx$$

для любой основной функции  $\varphi$ . Покажите, что

$$\delta(f) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

5. а) Покажите, что  $\theta'(x) = \delta(x)$  в смысле обобщенных функций;  
б) Пусть функция  $f$  дифференцируема во всех точках кроме точки  $x_0$ , где имеет разрыв  $[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ . Покажите, что в смысле обобщенных функций

$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0),$$

где  $\{f'(x)\} = f'(x)$  при  $x \neq x_0$  и  $\{f'(x)\} = 0$  при  $x = x_0$ .

6. а) Определим обобщенные функции  $1/x$  и  $1/x^2$  равенствами

$$\left(\frac{1}{x}, f\right) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx, \quad \left(\frac{1}{x^2}, f\right) = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx$$

для любой основной функции  $f$ . Покажите, что в смысле обобщенных функций

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

б) Определите обобщенную функцию  $1/x^3$ .

7. Пусть  $\varphi(x, y)$  – антисимметричная дифференцируемая функция,  $\varphi(y, x) = -\varphi(x, y)$ . Докажите тождество

$$\delta'(x - y)\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \delta(x - y)(\partial_y - \partial_x)\varphi(x, y).$$

8. Докажите тождество

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n).$$

9. В  $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$  докажите тождества

$$\text{а) } \partial_{\bar{z}} \left( \frac{1}{z} \right) = \pi \delta(z); \quad \text{б) } \Delta \log |z| = 2\pi \delta(z),$$

где  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$  – оператор Лапласа; в) найдите  $\partial_{\bar{z}} \left( \frac{1}{z^2} \right)$ .

10. В  $\mathcal{D}'(\mathbb{C})$  докажите тождества

$$\text{а) } \partial_{\bar{z}} \log z = -\pi \delta(y) \theta(-x); \quad \text{б) } \partial_z \log z = \frac{1}{z} + \pi \delta(y) \theta(-x),$$

где  $\log z$  – однозначная голоморфная ветвь логарифма в  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  такая, что  $\log x \in \mathbb{R}$  при  $x \in \mathbb{R}_+$ .