Семинар 1.

В вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z рассмотрим аффинные плоскости (экраны) $U_0 = \{z = 1\}$, $U_1 = \{x = 1\}$ и $U_2 = \{y = 1\}$. В плоскости U_0 в качестве координат естественно взять координаты u и v, соответствующие координатам x и y в плоскости $z = 0$, а в плоскости U_1 взять координаты s и t, соответствующие координатам y и z в плоскости $z = 0$. Плоскости U_0, U_1 и U_2, как мы знаем, являются картами для проективной плоскости $\mathbb{P}^2 = \mathbb{RP}^2$, в которой мы ввели однородные проективные координаты $(a_0 : a_1 : a_2)$ такие, что $u = a_1/a_0,\ v = a_2/a_0$. Напомним, что в координатах $(a_0 : a_1 : a_2)$ карты U_0, U_1 и U_2 задаются условиями $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$ соответственно.

Задача 1. Найдите явные формулы, связывающие аффинные кординаты u, v и s, t на пересечении $U_0 \cap U_1$ карт U_0 и U_1.

Задача 2. В карте U_0 задана окружность $u^2 + v^2 = 1$. Найдите кривую, соответствующую ей в карте U_1.

Задача 3. В карте U_0 задана парабола $v = u^2$. Найдите кривую, соответствующую ей в карте U_1.

Задача 4. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V)$, где V - двумерное векторное пространство над полем $\Bbbk$. Для произвольного ненулевого вектора $v \in V$ через $\langle v \rangle$ будем обозначать соответствующую точку в $\mathbb{P}^1$. Как обсуждалось на семинаре, если e_0, e_1 - базис в V, заданный с точностью до пропорциональности, то его класс пропорциональности называется *проективной системой координат* в $\mathbb{P}^1$. *Проективными координатами* произвольной точки $(x_0 : x_1)$ называется класс пропорциональности $(x_0 : x_1)$ пары скаляров (x_0, x_1) (скалярами называем элементы поля $\Bbbk$) таких, что $v = x_0 e_0 + x_1 e_1$.
Покажите, что для трех различных точек $E_0,\ E_1,\ E \in \mathbb{P}^1$ существует единственная проективная система координат (x_0, x_1), в которой $E_0 = (1 : 0),\ E_1 = (0 : 1),\ E = (1 : 1)$.