Лекция 3. Однородные пространства, виртуальные подгруппы.

Теорема 3.1. Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа Ли. Тогда на множестве G/H левых смежных классов существует единственная структура гладкого многообразия при которой отображение

$$p : G \to G/H, g \mapsto gH$$

является факторизацией. При этом:

- $\dim G/H = \dim G - \dim H$;
- Отображение p – локально тривиальное расслоение;
- Действие G на G/H – гладкое действие на гладком многообразии;
- Если H – нормальная подгруппа, то G/H является группой Ли.

Доказательство.

Лемма 3.2. G/H – хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой.

Доказательство. Топология на G/H – это фактор-топология на G по разбиению на левые смежные классы. Она задаётся следующим образом: $U \subset G/H$ – открыто в G/H, если и только если полный прообраз $p^{-1}(U)$ открыт в G. Очевидно, что p – непрерывное отображение. Более того, p – открытое Действительно, если $U \subset G$ открыто, то $p(U)$ – открыто в G/H, так как $p^{-1}(p(U)) = U \cdot H$ – открыто. Докажем, что G/H – хаусдорфово. Пусть $g_1H, g_2H \in G/H$. Так как $g_1^{-1}g_2 \notin H$ и H – замкнуто, то из непрерывности отображений умножения и взятия обратного следует, что существуют такие окрестности элементов $g_1 \in O(g_1)$ и $g_2 \in O(g_2)$ в G, что $O(g_1)^{-1}O(g_2) \cap H = \varnothing$, следовательно $O(g_1)H \cap O(g_2)H = \varnothing$. Тогда из открытости p следует, что $p(O(g_1))$ и $p(O(g_2))$ будут непересекающимися окрестностями g_1H и g_2H в G/H. Наконец, так как p – открыто, то G/H обладает счётной базой. □

Лемма 3.3. Существует вложенное подмногообразие $S \subset G$ такое, что отображение умножения $m : S \times H \to G$ – диффеоморфизм на открытое подмножество V группы G.

Доказательство. Выберем некоторое подмногообразие $S_1 \ni e$, которое трансверсально пересекается с H в точке e, то есть $T_eG = T_eS_1 \oplus T_eH$: пусть $x_1, \dots, x_n$ – такие локальные координаты в окрестности $O(e)$ точки $e \in G$, что $e = (0, \dots, 0)$ и $H \cap O(e) = \{x_1 = \ldots = x_k = 0\}$, тогда в качестве S_1 можно взять подмножество в $O(e)$, заданное уравнениями $\{x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$. Рассмотрим отображение $\psi : S_1 \times H \to G, (s, h) \mapsto sh$. Тогда $d_{(e,e)}\psi(a, b) = a+b$, где $a \in T_eS_1, b \in T_eH$. Так как пересечение трансверсально, то $d_{(e,e)}\psi$ – изоморфизм. По теореме об обратной функции ψ – это локальный диффеоморфизм, то есть существуют такие открытые $S_2 \subset S_1$, $O \subset H$, содержащие e, что ограничение ψ на $S_2 \times O$ – диффеоморфизм на открытое подмножество W группы G.

Заметим, что $\psi(s, hh') = \psi(s, h)h'$. Это означает, что ψ является локальным диффеоморфизмом на $S_2 \times H$. Действительно, у точки $(s, h) \in S_2 \times H$ можно найти окрестность $S_2 \times Oh$, диффеоморфную открытому подмножеству Wh группы G. Осталось выбрать такую окрестность $S \subset S_2$, содержащую e, что $SS^{-1} \cap H \subset O$ (такая существует из непрерывности умножения). В этом случае отображение ψ локально-диффеоморфно и инъективно (следовательно, диффеоморфизм) на $S \times H$, таким образом подмногообразие S (открытое подмножество S_1) – искомое. □

Построим структуру гладкого многообразия на G/H следующим образом.

- Из леммы следует, что $U := p(V)$ гомеоморфно S. Это позволяет перенсти струкутуру многообразия с S на окрестность eH;
- Множество gU является окрестностью точки gH гомеоморфной $p(V)$;
- По построению p – локально-тривиальное расслоение над каждым gU.
- Более того, над $gU_1 \cap gU_2$ гладкие структуры диффеоморфны, по свойству факторизации. Это означает, что структура многообразия введена корректно.

Докажем теперь что действие G на G/H – гладкое. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times p"'] \arrow[dr, "q"] & G \arrow[d, "p"] \\
G \times G/H \arrow[r, "\lambda"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Здесь m – умножение в G, λ – естественное действие G на G/H. Несложно видеть, что произведение локально тривиальных расслоений является локально тривиальным расслоением. Это означает, что $\mathrm{id} \times p$ – факторизация. Отображение $q = p \circ m$ – гладкое, следовательно, λ – гладкое.

Пусть теперь H – нормальная подгруппа в G. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p \times p"'] \arrow[dr, "q"] & G \arrow[d, "p"] \\
G/H \times G/H \arrow[r, "m_H"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Здесь m_H – умножение в G/H. Так как $q = p \circ m$ гладкое, получаем, что m_H – гладкое, аналогично пункту 3). Гладкость обратного отображения в G/H следует из коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & G \arrow[d, "p"] \\
G/H \arrow[r, "i_H"'] & G/H
\end{tikzcd},$$

где i – отображение взятия обратного элемента в G, i_H – отображение взятия обратного элемента в G/H, $r = p \circ m$.

□

Утверждение о том, что G/H является многообразием – это частный случай следующего утверждения: Пусть группа Ли G действует на многообразии X гладко, свободно (то есть для любого $x \in X$ если $g \cdot x = h \cdot x$, то $g = h$) и собственно (то есть при отображении $G \times X \to X$ прообраз компактного подмножества является компактным подмножеством). Тогда на пространстве орбит X/G существует единственная структура гладкого многообразия такая, что естественное отображение $G \to X/G$ является гладким, а дифференциал – сюръективным в любой точке.

Следствие 3.4. Касательное пространство $T_{eH}(G/H)$ канонически изоморфно T_eG/T_eH.

Доказательство. Так как p – локально-тривиальное расслоение, то дифференциал

$$d_ep : T_eG \to T_e(G/H)$$

сюръективен и $\ker d_ep = T_eH$. □

Следствие 3.5. Пусть $f : G \to G$ – автоморфизм группы G. Пусть H_1, H_2 подгруппы Ли, причём $f(H_1) = H_2$. Тогда G/H_1 диффеоморфно G/H_2.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & & G/H_2 \\
& G/H_1 \arrow[ur, "{[f]}"'] &
\end{tikzcd}$$

где $f(gH_1) = f(g)H_2$. Отсюда из свойств факторизации получаем что отображение ψ это диффеоморфизм. □

Следствие 3.6. Пусть G действует на гладком многообразии X и пусть $x \in X$. Тогда:

1. Отображение $\beta_x : G/G_x \to X, [g] \mapsto g \cdot x$ является инъективной иммерсией $G/G_x \to X$ с образом Gx. Таким образом орбита является вложенным подмногообразием многообразия X. Более того, структура вложенного многообразия на орбите не зависит от выбора точки x орбиты.
2. Если действие G на X транзитивно, то X диффеоморфно G/G_x.

Доказательство. 1) Пусть $\alpha_x : G \to X, g \to g \cdot x$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\alpha_x"] \arrow[dr, "p"'] & & X \\ & G/G_x \arrow[ur, "\beta_x"'] & \end{tikzcd}$$

Так как p – факторизация и α_x – гладкое, то и β_x – гладкое. На уровне множеств β_x – биекция между G/G_x и орбитой Gx. Более того, $\operatorname{rk} \alpha_x$ постоянен и равен

$$\dim Gx = \dim G - \dim G_x,$$

а дифференциал отображения p сюръективен в любой точке. Из этого следует, что β_x – инъективная иммерсия, а значит Gx – вложенное подмногообразие многообразия X.

Пусть теперь $g \cdot x = x_1 \in Gx$ – другая точка орбиты Gx. Заметим, что

$$\mathrm{Ad}_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$$

автоморфизм группы Ли G. При этом $gG_xg^{-1} = G_{x_1}$, следовательно, G/G_x диффеоморфно G/G_{x_1}.

2) Следует из первого пункта, так как в этом случае β_x – гладкая биекция, причем дифференциал в любой точке является изоморфизмом. □

Следствие 3.7. Структура гладкого многообразия на G/H такая, что действие G на H является гладким – единственна.

Доказательство. Достаточно применить рассуждение из доказательства предыдущего следствия к транзитивному действию G на G/H. □

Определение 3.8. Однородным пространством называется гладкое многообразие с транзитивным действием группы Ли.

Определение 3.9. Однородное пространство – это пространство диффеоморфное многообразию G/H, где G – это группа Ли, а H – подгруппа Ли.

Из второго пункта следствия 3.6 следует эквивалентность определений.

Примеры.

1. Определим множество флагов $Fl_{k_1,\dots,k_m}$ векторного пространства $\Bbbk^n$ как набор вложенных подпространств $\{0\} \subset U_1 \subset \dots \subset U_m \subset V$, где $\dim U_i = k_i$. На этом множестве транзитивно действует группа $GL_n(\Bbbk)$. Это позволяет *определить* структуру гладкого многообразия на пространстве флагов посредством биекции $G/G_x \simeq Fl_{k_1,\dots,k_m}$ (здесь x – произвольный элемент множества флагов). Частный случай $m = 1$ позволяет определить структуру гладкого многообразия на грассманиане $Gr(k, n)$.
2. Группа $SO_3(\mathbb{R})$ транзитивно действует на S^2, причём стабилизатор любой точки это $SO_2(\mathbb{R})$. Это значит, что $S^2 \simeq SO_3(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$. Если заметить, что $SO_2(\mathbb{R})$ диффеоморфно S^1, то получаем локально тривиальное расслоение $p : SO_3(\mathbb{R}) \to S^2$ со слоем S^1, которое тесно связанно с *расслоением Хопфа* сферы S^3 над S^2 со слоем S^1.

(3) $GL_n(\Bbbk)$ рассмотрим подгруппу $\Bbbk^*$, состоящую из скалярных матриц. Тогда $\Bbbk^*$ – это нормальная подгруппа Ли группы Ли $GL_n(\Bbbk)$. Это позволяет определить проективную линейную группу

$$PGL_n(\Bbbk) \simeq GL_n(\Bbbk)/\Bbbk^*.$$

3.1. **Виртуальные подгруппы Ли и теорема о гомоморфизме.**

Определение 3.10. *Виртуальная подгруппа Ли* – это подгруппа группы Ли G, являющаяся погруженным подмногообразием.

Предложение 3.11. Виртуальная подгруппа группы Ли сама является группой Ли.

Доказательство. В окрестности любой своей точки погруженное подмногообразие является вложенным подмногообразием (3.17). Ограничение гладких функций на вложенное подмногообразие является гладким. □

Заметим, что если M – проивзольное многообразие, а $N \subset M$ – некоторое подмножество, то, вообще говоря, оно может быть наделено структурой вложенного подмногообразия больше чем одним способом. Например, рассмотрим объединение S^1 с единичным касательным отрезком (не включая конец), как подмножество $\mathbb{R}^2$.

Тогда существуют инъективные иммерсии с одной стороны интервала, с другой стороны объединения интервала и окружности, которые задают различные структуры гладких многообразий на этом объединении.

Предложение 3.12. Любая абстрактная подгруппа группы Ли может быть наделена структурой виртуальной подгруппы Ли не более чем одним способом.

Доказательство.

Лемма 3.13. Пусть H виртуальная подгруппа Ли группы Ли G. Тогда существует окрестность $O_H(e)$ единицы в группе H и такое вложенное подмногообразие $S \subset G$, что отображение умножения $S \times O_H(e)$ является диффеоморфизмом на некоторую окрестность единицы $O_G(e)$ группы Ли G. При этом

$$H \cap O_G(e) = T \cdot O_H(e),$$

где $T = H \cap S$ – не более чем счётно. Если при этом окрестность $O_H(e)$ связна, то $O_H(e)$ является связной компонентой единицы в множестве $O_G(e) \cap H$ (в индуцированной топологии).

Доказательство. Так как H локально является локально-замкнутым подмногообразием, то окрестность строится также как в доказательстве Теоремы 3.1. □

Пусть H_1 и H_2 – две виртуальные подгруппы Ли, совпадающие как абстрактные подгруппы. Рассмотрим тождественное отображение $\mathrm{id} : H_1 \to H_2$. Из леммы следует, что существует связная окрестность $O_H(e)$ одновременно для H_1 и H_2 и вложенное подмногообразие S, так что $O_H(e) \times S$ диффеоморфно некоторой $O_G(e)$. Отсюда следует, что отображение id дифференцируемо в окрестности единицы, а, значит, и в любой точке. Таким свойством удовлетворяет и обратное отображение. Таким образом структуры гладкого мнгообразия на H совпадают, что и требовалось доказать.

□

Подгруппа вещественной группы Ли является виртуальной подгруппой Ли тогда и только тогда, когда в индуцированной топологии они содержат не более чем счётное число компонент линейной связности.

Теорема 3.14. Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа Ли в G_1 и $\operatorname{Im}\varphi \simeq G_1/\operatorname{Ker}\varphi$ является виртуальной подгруппой Ли в группе Ли G_2. В частности, если образ φ замкнут, то $\operatorname{Im}\varphi$ является подгруппой Ли группы Ли G_2, изоморфной группе Ли $G_1/\operatorname{Ker}\varphi$.

Доказательство. G_1 действует на G_2 по правилу $g_1 \cdot g_2 = \varphi(g_1)g_2$. Тогда теорема – это частный случай следствия 3.6, где $\operatorname{Ker}\varphi$ – стабилизатор единицы $e \in G$. $\square$

Замечание. Отметим, что изоморфизм теоремы 3.14 устроен следующим образом

$$G_1/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi, [g_1] \to \varphi(g_1).$$

Следствие 3.15. Биективный гомоморфизм групп Ли является изоморфизмом.

Примеры.

(1) Пусть ненулевые целые числа m, n не имеют общего делителя. Рассмотрим гомоморфизм групп Ли

$$f : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t \frac{m}{n}}.$$

Тогда $\operatorname{Ker} f = \{k \cdot \frac{n}{m} \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. При этом f – сюръективный гомоморфизм. Это означает, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.

(2) Рассмотрим гомоморфизм групп Ли $Aff_n(\Bbbk) \to GL_n(\Bbbk), AX + B \mapsto A$. Он сюръективен, ядро изоморфно группе параллельных переносов $\Bbbk^n$, следовательно,

$$GL_n(\Bbbk) \simeq Aff_n(\Bbbk)/\Bbbk^n.$$

(3) Пусть B – группа Ли верхнетреугольных матриц, а N – группа Ли строго верхнетреугольных матриц, T – группа Ли диагональных матриц. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм

$$\varphi : B \to T,$$

который в качестве образа берёт диагональные элементы матрицы из B. Тогда это сюръективный гомоморфизм групп Ли с ядром N и $B/N \simeq T$.

Аппендикс. Гладкие многообразия.

Теорема 3.16. Пусть M, N – гладкие многообразия. Пусть $f : M \to N$, $\dim M = m < \dim N = n$ – гладкое отображение постоянного ранга k. Тогда для любой точки $m \in M$ существуют карты $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^m)$ и $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ такие, что $f(U) \subset V$ и

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

Предложение 3.17. Погруженное подмногообразие локально является вложенным.

Доказательство. Применяя теорему об отображении постоянного ранга к иммерсии $i : N \to M$ получаем, что окрестность U из формулировки теоремы является вложенным подмногообразием многообразия M. $\square$