

Геометрическое введение в алгебраическую геометрию.

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания с 1 занятия.

- (1) Пусть I — идеал в кольце A . Радикалом идеала I называется множество таких $a \in A$, что $a^m \in I$ для некоторого натурального m . Докажите, что радикал идеала совпадает с пересечением всех простых идеалов, содержащих I . (Включение в одну сторону было доказано на лекции, осталось доказать в другую сторону.)
- (2) Докажите равносильность следующих двух вариантов теоремы Гильберта о нулях (\mathbf{k} — алгебраически замкнутое поле):
 - а) Любой максимальный идеал в кольце многочленов $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]$ имеет вид $(t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)$ при некоторых a_1, \dots, a_n из поля \mathbf{k} .
 - б) Если I — идеал в кольце многочленов $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]$ и $V(I) = \emptyset$, то $I = (1)$. (Напомним, что по определению $V(I) = \{a \in \mathbb{A}^n, P(a) = 0 \ \forall P \in I\}$, \mathbb{A}^n — n -мерное аффинное пространство над полем \mathbf{k} .)
- (3) Докажите, что аффинное алгебраическое многообразие X неприводимо тогда и только тогда, когда в алгебре регулярных функций на нем $\mathbf{k}[X]$ нет делителей нуля. (В одну сторону это утверждение было доказано на лекции, осталось доказать в другую сторону.)
- (4) Докажите, что плоская аффинная кривая, заданная уравнением $xy = 1$, неприводима.
- (5) Докажите, что плоская аффинная кривая, заданная уравнением $y^2 = x^3$, не изоморфна аффинной прямой.

(6) Выясните, какие из перечисленных ниже плоских аффинных кривых, заданных уравнением на плоскости XOY (над алгебраически замкнутым полем) попарно изоморфны, а какие нет, сравнивая кольца регулярных функций на них. (Для некоторых пар я не знаю простых решений...)

а) Аффинная прямая.

б) $y = x^2$.

в) $xy = 1$.

г) $x^2 + y^2 = 1$.

д) $xy = 0$.

е) $y(y - x^2) = 0$.

ж) $y(y - x^2 + 1) = 0$.

з) $y^2 = x^3$.

и) $y^2 = x^3 + x^2$.

к) $y^2 = x(x - 1)(x - c)$, $c \neq 0, 1$.