Прикладные методы анализа – 2023

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

Гармонической функцией в $\mathbb{R}^n$ называется функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta f = 0$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа. Ниже мы рассмотрим гармонические функции на плоскости с декартовыми координатами x, y $(n = 2)$. В этом случае теория гармонических функций тесно связана с теорией аналитических функций комплексного переменного $z = x + iy$.

Уравнение Лапласа и свойства гармонических функций. *Гармонической* в области $\mathsf{D} \subset \mathbb{C}$ функцией называется вещественнозначная функция $u(x, y)$, обладающая в этой области непрерывными вторыми частными производными и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Здесь $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа на плоскости.

Между гармоническими и голоморфными функциями существует тесная связь.

Теорема. *Действительная и мнимая части функции $f = u + iv$, однозначной и голоморфной в области D, являются в этой области гармоническими функциями.*

Доказательство. Это прямо следует из условий Коши-Римана $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$:

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = 0.$$

Отметим, что возможность дифференцировать условия Коши-Римана вытекает из того, что голоморфная функция обладает производными всех порядков. ■

Две гармонические функции u, v, связанные условиями Коши-Римана (т.е. действительная и мнимая части некоторой голоморфной функции), называются *сопряженными.*

Теорема. *Для всякой функции $u(x,y)$, гармонической в односвязной области D, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x,y)$ (а значит, и голоморфную функцию f такую, что $u = \operatorname{Re} f$).*

Доказательство. Мы имеем $\Delta u = 4\partial_{\bar{z}}(\partial_z u) = 0$, откуда заключаем, что функция $2\partial_z u = u_x - iu_y$ голоморфна в D. В односвязной области D она имеет первообразную $f = U + iV$. Тогда

$$f' = u_x - iu_y = U_x + iV_x = U_x - iU_y$$

(последнее равенство следует из условий Коши-Римана для U, V). Отсюда заключаем, что $U_x = u_x$, $U_y = u_y$ или $(U - u)_x = (U - u)_y = 0$ в D. Это означает, что $U - u = \text{const}$. Вычитая эту константу из f, получим голоморфную в D функцию, для которой $\operatorname{Re} f = u$, а $\operatorname{Im} f = v$ – сопряженная гармоническая функция. ■

В неодносвязной области существуют гармонические функции, не являющиеся вещественными частями голоморфных. Например, $\mathsf{D} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $u = \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$. Тогда функция $2\partial_z u = 1/z$ не имеет однозначной первообразной в D. Сопряженная гармоническая функция в этом случае многозначна (равна $\arg z$).

Некоторые свойства гармонических функций легко получаются из соответствующих свойств голоморфных функций.

- Бесконечная дифференцируемость: *Гармоническая функция обладает частными производными всех порядков, причем все они тоже гармоничны.*

  Это следует из бесконечной дифференцируемости f.

- Теорема о среднем: $u(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})d\varphi$.

- Принцип максимума: *Отличная от постоянной гармоническая функция не может достигать экстремума во внутренней точке области определения.*

  Это достаточно доказать для максимума (ибо минимум u является максимумом для $-u$). Предположим противное – что максимум достигается во внутренней точке z_0. В окрестности z_0 рассмотрим однозначную голоморфную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f = u$. Функция e^f голоморфна, а ее модуль достигает максимума в z_0, что невозможно по принципу максимума модуля.

- Аналог теоремы Лиувилля: *Если функция и гармонична на $\mathbb{C}$ и ограничена сверху ($u(z) \le M$ везде в $\mathbb{C}$), то $u = \text{const}$.*

  Это следует из теоремы Лиувилля, примененной к $g = e^f$ ($|g| \le e^M$ везде в $\mathbb{C}$).

Вот еще некоторые простые, но важные свойства гармонических функций.

Теорема. *Если функция $u(z)$ гармонична в области D и $z = g(\zeta)$ – голоморфная в некоторой области G функция, значения которой лежат в D, то сложная функция $u(g(\zeta))$ гармонична в G.*

Доказательство. Рассмотрим (быть может, многозначную) голоморфную функцию $f(z)$, для которой $u = \mathrm{Re} f$. Функция $F(\zeta) = f(g(\zeta))$ голоморфна в G, и, следовательно, $U(\zeta) = \mathrm{Re} f(g(\zeta)) = \mathrm{Re} F(\zeta)$ гармонична в G. ■

Теорема единственности для голоморфных функций не переносится полностью на гармонические, ибо гармонические функции, совпадающие на линиях, вовсе не обязаны совпадать в области. (Например, на линиях уровня они принимают постоянные значения, сами не будучи постоянными.) Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если две функции, гармонические в области D, совпадают в какой-либо области $\mathsf{D}_1 \subset \mathsf{D}$, то они совпадают и везде в D.*

Доказательство. Разность u этих функций гармонична и равна 0 в D_1. Рассмотрим (быть может, многозначную) голоморфную функцию $f(z)$, для которой $u = \mathrm{Re} f$. В области D_1 сопряженная с u гармоническая функция v постоянна в силу условий Коши-Римана. Следовательно, f постоянна в D_1, а значит, и во всей области D. Но тогда и u постоянна в D и равна там, следовательно, нулю. ■

Интегральные формулы для гармонических функций. Начнем с совсем простого утверждения.

Теорема. *Если функция $u(z)$ гармонична в односвязной области D и непрерывна вместе со своими частными производными в $\overline{\mathsf{D}}$, то*

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по нормали, а $ds = |dz|$ – дифференциал дуги.

Доказательство. Рассмотрим в $\overline{\mathsf{D}}$ сопряженную к u гармоническую функцию v; она однозначна в силу односвязности D. Пользуясь условиями Коши-Римана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s},$$

заключаем, что $\oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = \oint_{\partial \mathsf{D}} dv = 0.$ ■

В дальнейшем используется следующий вариант формулы Грина. Для любых дважды непрерывно дифференцируемых в области D функций f, g справедлива интегральная формула

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} f \partial_n g\, ds = \int_{\mathsf{D}} (\nabla f \cdot \nabla g) dxdy + \int_{\mathsf{D}} f \Delta g\, dxdy.$$

Отсюда сразу следует, что если u_1, u_2 – гармонические функции в D, то

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n}\, ds = \oint_{\partial \mathsf{D}} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\, ds.$$

Теорема. *Пусть $u(z)$ – гармоническая функция в D, тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}}\Big(u(z)\partial_n\log|z-a|-\partial_n u(z)\log|z-a|\Big)ds=\begin{cases} u(a) & \text{при } a\in\mathsf{D}\\ 0 & \text{при } a\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathsf{D}}\end{cases}$$

где нормаль направлена наружу области.

Доказательство. Результат при $a\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathsf{D}}$ сразу следует из предыдущей формулы, т.к. $\log|z-a|$ в этом случае гармоническая функция. Пусть $a\in\mathsf{D}$. Вырежем вокруг точки a маленький круг $U_\rho=\{|z-a|<\rho\}$ и применим только что доказанную формулу к области $\mathsf{D}_\rho=\mathsf{D}\setminus U_\rho$:

$$\oint_{\partial\mathsf{D}_\rho}\Big(u(z)\partial_n\log|z-a|-\partial_n u(z)\log|z-a|\Big)ds=0.$$

Выписав отдельно интегралы по каждой компоненте границы, будем иметь (с учетом направления нормали наружу):

$$\oint_{\partial\mathsf{D}}\Big(u(z)\partial_n\log|z-a|-\partial_n u(z)\log|z-a|\Big)ds$$

$$=\oint_{\partial U_\rho}u(z)\partial_n\log|z-a|\,ds-\oint_{\partial U_\rho}\partial_n u(z)\log|z-a|\,ds$$

Поскольку $\log|z-a|=\rho$ на границе круга, второй интеграл в правой части равен 0. В первом интеграле имеем $\partial_n\log|z-a|=\partial_r\log r\,\Big|_{r=\rho}=1/\rho$. Следовательно,

$$\oint_{\partial\mathsf{D}}\Big(u(z)\partial_n\log|z-a|-\partial_n u(z)\log|z-a|\Big)ds=\frac{1}{\rho}\oint_{\partial U_\rho}u(z)\,ds=2\pi u(a),$$

поскольку левая часть не меняется при $\rho\to 0$. ■

Задача Дирихле и функция Грина. Формулировка краевой задачи Дирихле следующая. Дана область D с (для простоты гладкой) границей и непрерывная функция $h:\partial\mathsf{D}\to\mathbb{R}$. Требуется найти гармоническую в D и непрерывную в $\overline{\mathsf{D}}$ функцию u такую, что $u=h$ на границе.

Из принципа максимума для гармонических функций легко следует, что задача Дирихле может иметь не более одного решения. В самом деле, пусть $u_{1,2}$ – два решения с одной и той же граничной функцией. Тогда $u=u_1-u_2$ есть гармоническая в D функция, равная 0 на границе. По принципу максимума, примененного к u и $-u$, она равна 0 и везде в области, т.е. $u_1=u_2$.

Общее решение задачи Дирихле выражается с помощью *функции Грина* задачи Дирихле в области D (или просто функции Грина области D). Функцией Грина G области D называется функция $G(z,\zeta)$ на $\overline{\mathsf{D}}\times\overline{\mathsf{D}}$ такая, что

а) функция $g(z,\zeta)=G(z,\zeta)-\log|z-\zeta|$ гармонична по z при любом ζ и гармонична по ζ при любом z;

б) $G(z,\zeta)=G(\zeta,z)$;

в) $G(z,\xi)=0$ при всех $z\in\mathsf{D}$ и $\xi\in\partial\mathsf{D}$ (т.е. функция Грина равна 0 на границе).

Отметим, что условие а) можно записать как

$$\Delta_z G(z,\zeta)=\Delta_\zeta(z,\zeta)=2\pi\delta(z-\zeta).$$

Тот же аргумент, что и выше, показывает, что функция Грина единственна. Для доказательства ее существования воспользуемся биголоморфным (конформным) отображением $w:\mathsf{D}\to U$ области D на единичный диск, существующим в силу теоремы Римана. Легко проверяется, что выражение

$$G(z,\zeta)=\log\left|\frac{w(z)-w(\zeta)}{1-w(z)\overline{w(\zeta)}}\right|$$

удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Грина. Отметим, что конформное отображение w не единственно, поскольку у единичного диска существуют нетривиальные конформные автоморфизмы. Единственность отображения w достигается наложением условий нормировки: например, $w(a)=0$ для некоторой фиксированной точки $a\in\mathsf{D}$, $w'(a)\in\mathbb{R}_+$. Можно показать, что функция Грина не зависит от нормировки конформного отображения $w(z)$.

Для гармонической в $\overline{\mathsf{D}}$ функции u справедлива формула

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}}u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(z,\xi)|d\xi|,$$

которая связывает граничные значения функции с ее значениями во внутренности и тем самым подсказывает формулу для решения задачи Дирихле. Чтобы убедиться в справедливости этой формулы, запишем

$$G(z,\zeta)=\log|z-\zeta|+g(z,\zeta),$$

положим для краткости $\log|z-\xi|:=\log r$ и воспользуемся интегральными формулами для гармонических функций:

$$\oint_{\partial\mathsf{D}}\Big(u\partial_n G-G\partial_n u\Big)|d\xi|=\underbrace{\oint_{\partial\mathsf{D}}\Big(u\partial_n\log r-\partial_n u\log r\Big)|d\xi|}_{2\pi u(z)}+\underbrace{\oint_{\partial\mathsf{D}}\Big(u\partial_n g-g\partial_n u\Big)|d\xi|}_{0}=2\pi u(z).$$

Остается вспомнить, что $G(z,\xi)=0$ при $\xi\in\partial\mathsf{D}$. В частности, при $u(z)=1$ имеем формулу

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}}\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)|d\xi|=1.$$

Можно показать, что общая формула для решения задачи Дирихле такова:

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}}h(\xi)\partial_{n_\xi}G(z,\xi)|d\xi|.$$

Выражение $P(z,\xi)=\partial_{n_\xi}G(z,\xi)$ (где $\xi\in\partial\mathsf{D}$) называется *ядром Пуассона*. Если z стремится к точке границы, отличной от ξ, то $P(z,\xi)\to 0$, но если $z\to\xi$, то $P(z,\xi)\to\infty$. Поэтому при стремлении z к точке границы ядро Пуассона в пределе устроено как δ-функция на границе, откуда становится ясным механизм действия формулы для решения задачи Дирихле.

Пусть $\nu = n_x + in_y$ – единичный нормальный вектор к кривой $\gamma = \partial\mathsf{D}$, представленный как комплекное число. Его можно выразить через конформное отображение $w(z)$ области D на единичный круг:

$$\nu(z) = -i\frac{dz}{|dz|} = -i\frac{dz}{dw}\,\frac{dw}{|dz|} = -i\frac{1}{w'(z)}\,\frac{dw\,w}{w|dz|} = \frac{|w'(z)|w(z)}{w'(z)}$$

(т.к. $|dw| = -idw/w$). Вычислив нормальную производную от G согласно правилу $\partial_n = n_x\partial_x + n_y\partial_y = \nu\partial_z + \bar\nu\partial_{\bar z}$, будем иметь формулу, выражающую ядро Пуассона через конформное отображение области D на единичный круг:

$$P(z,\xi) = |w'(\xi)|\,\frac{1-|w(z)|^2}{|w(\xi)-w(z)|^2}.$$

Задача Дирихле в единичном диске. Для единичного диска функция Грина выражается явной формулой $G(z,\zeta) = \left|\dfrac{z-\zeta}{1-z\bar\zeta}\right|$, а ядро Пуассона

$$P(z,e^{i\theta}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Согласно доказанной выше интегральной формуле,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})d\theta = 1 \quad \text{для всех } z\in U.$$

Докажем, что в единичном диске U задача Дирихле восстановления гармонической функции u по ее граничному значению h решается формулой Пуассона

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,h(e^{i\theta})d\theta$$

Функция h предполагается равномерно непрерывной на единичной окружности.

Надо доказать, что а) функция u – гармоническая в U, б) $\lim\limits_{z\to\zeta_0} u(z) = h(\zeta_0)$, $|\zeta_0| = 1$. Утверждение а) следует из того, что функция u совпадает с вещественной частью функции

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,u(e^{i\theta})d\theta,$$

голоморфной в U. Остается показать, что при z стремящемся по точкам U к произвольной точке $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \partial U$, значение $u(z)$ стремится к $h(e^{i\theta_0})$. Вспомнив, что $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})d\theta = 1$, запишем разность между функцией $u(z)$ и ее предполагаемым пределом в виде

$$u(z) - h(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})\Big(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})\Big)d\theta.$$

В силу равномерной непрерывности функции h для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для всех θ и θ_0 таких, что $|\theta - \theta_0| < \delta$ имеем

$$|h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})| < \varepsilon.$$

Перепишем наш интеграл в виде $u(z) - h(e^{i\theta_0}) = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} P(z, e^{i\theta}) \Big(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0}) \Big) d\theta,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{0}^{\theta_0-\delta} + \int\limits_{\theta_0+\delta}^{2\pi} \right) P(z, e^{i\theta}) \Big(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0}) \Big) d\theta.$$

На основании формулы $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta = 1$ интеграл I_1 оценивается как $|I_1| < \varepsilon$. Положим $M = \max |h(e^{i\theta})|$. После выбора δ возьмем z настолько близким к $e^{i\theta_0}$, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{0}^{\theta_0-\delta} + \int\limits_{\theta_0+\delta}^{2\pi} \right) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}\, d\theta < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тогда $|I_2| < \varepsilon$.

Ядро Шварца. Формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\, u(e^{i\theta}) d\theta + i \operatorname{Im} f(0)$$

восстанавливает голоморфную в единичном круге функцию по ее вещественной части на единичной окружности. (Ядро в этой интегральной формуле называется ядром Шварца.)

В общем случае можно ввести функцию $H(z, \zeta)$, гармонически сопряженную функции Грина $G(z, \zeta)$ по переменной z и положить $F(z, \zeta) = G(z, \zeta) + iH(z, \zeta)$. Тогда ядро Шварца для произвольной области выразится как $S(z, \xi) = \partial_{n_\xi} F(z, \xi)$ (здесь $z \in \mathsf{D}$, $\xi \in \partial \mathsf{D}$). Вычислив нормальную производную от

$$F(z, \zeta) = \log \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}},$$

найдем ядро Шварца для произвольной области:

$$S(z, \xi) = |w'(\xi)|\, \frac{w(\xi) + w(z)}{w(\xi) - w(z)}.$$

Формула Адамара. Существует замечательная формула, выражающая изменение функции Грина задачи Дирихле при малой вариации области через саму функцию Грина. Вот идея ее вывода. Будем описывать малые вариации области D с помощью нормального смещения ее границы $\delta n(\xi)$, $\xi \in \partial \mathsf{D}$. (Считаем, что $\delta n > 0$, если граница смещается наружу.) Рассмотрим разность функций Грина новой и старой областей:

$$\delta G(z,\zeta) = G_1(z,\zeta) - G(z,\zeta).$$

На границе новой области D_1 имеем $G_1(z,\xi) = 0$, $\xi \in \partial\mathsf{D}_1$. Старая функция Грина в этой точке равна, очевидно, $\partial_{n_\xi} G(z,\xi)\delta n(\xi)$ (в первом порядке по δn). Заметим, что $\delta G(z,\zeta)$ – гармоническая по ζ функция (особенность при $\zeta = z$ сокращается) с граничным значением $-\partial_n G(z,\xi)\delta n(\xi)$. Поэтому мы можем выразить ее везде в области через функцию Грина, решив задачу Дирихле:

$$\delta G(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}} \partial_{n_\xi} G(z,\xi)\partial_{n_\xi} G(\zeta,\xi)\, \delta n(\xi)|d\xi|.$$

Это и есть формула Адамара. Ее можно переписать для функции $F(z,\zeta)$ через ядро Шварца в виде

$$\delta F(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}} S(z,\xi)\partial_n G(\zeta,\xi)\, \delta n(\xi)|d\xi|.$$

Предположим, что $0 \in \mathsf{D}$ и нормируем наше конформное отображение следующим образом: $w(0) = 0$, $\arg w'(0) > 0$. Положив $\zeta = 0$, будем иметь $F(z,0) = \log w(z)$. Учтя, что $\partial_n \log|w(z)| = |w'(z)|$ для $z \in \partial\mathsf{D}$, получим формулу для вариации конформного отображения:

$$\delta \log w(z) = -\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}} \frac{w(\xi)+w(z)}{w(\xi)-w(z)}|w'(\xi)|^2\, \delta n(\xi)|d\xi|.$$

В частности, если деформированная область отличается от исходной маленькой "шишечкой" площади ε в точке ξ_0 границы, то независимо от формы шишечки в первом порядке по ε имеем

$$\delta \log w(z) = -\frac{\varepsilon}{2\pi}|w'(\xi_0)|^2\, \frac{w(\xi_0)+w(z)}{w(\xi_0)-w(z)}$$

($\varepsilon > 0$ если площадь деформированной области увеличивается и $\varepsilon < 0$ в противном случае). Разумеется, эту формулу можно применять, если только точка z не слишком близка к ξ_0.

Задача Неймана. Краевая задача Неймана заключается в восстановлении гармонической функции u в области D по граничному значению ее нормальной производной $g(\xi)$, $\xi \in \partial\mathsf{D}$, где $g(\xi)$ – непрерывная функция, заданная на границе. Другими словами, нужно найти функцию $u(z)$ такую, что $\Delta u = 0$ везде в D и $\partial_n u(\xi) = g(\xi)$, $\xi \in \partial\mathsf{D}$ (напомним, что вектор нормали у нас направлен наружу области). Из интегральной формулы для гармонических функций следует, что для разрешимости задачи Неймана необходимо наложить условие

$$\oint_{\partial\mathsf{D}} g(\xi)|d\xi| = 0.$$

При этом условии решение задачи Неймана существует и единственно с точностью до прибавления к функции u произвольной константы.

Можно показать, что общее решение задачи Неймана выражается через функцию Грина задачи Неймана

$$G^{(N)}(z,\zeta) = \log\Big|w(z) - w(\zeta)\Big| + \log\Big|1 - w(z)\overline{w(\zeta)}\Big|$$

следующим образом:

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}} G^{(N)}(z,\xi)g(\xi)|d\xi| + C,$$

где C – произвольная константа. Эту формулу можно записать еще так:

$$u(z) = -\frac{1}{\pi}\oint_{\partial\mathsf{D}} \log\Big|w(z) - w(\xi)\Big|\, g(\xi)\, |d\xi| + C.$$

Сама функция Грина задачи Неймана зависит от выбора нормировки конформного отображения $w(z)$, но нетрудно убедиться, что в формуле для решения задачи Неймана этот выбор влияет только на значение несущественной константы C.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.