Прикладные методы анализа – 2023

1 Интегралы типа Коши и их граничные значения. Формулы Сохоцкого-Племеля

2 Обобщенные функции

3 Гармонические функции и краевые задачи

4 Теория потенциала

5 Цилиндрические и сферические функции

Цилиндрические и сферические функции естественным образом возникают при попытке решить уравнение Гельмгольца

$$\Delta u = -\lambda u,$$

т.е. уравнение на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа, соответственно в круге (размерность $d = 2$) и в шаре ($d = 3$) с нулевыми граничными условиями.

Игрушечный пример: отрезок ($d = 1$). Чтобы дать наглядное представление о том, что мы собираемся делать в размерностях 2 и 3, мы начнем с "игрушечного" примера в размерности $d = 1$, где аналогом шара служит отрезок прямой (скажем, $[0, L]$).

Оператор Лапласа в одномерии – это просто оператор взятия второй производной ∂_x^2. Задача нахождения его собственных значений и собственных функций возникает при решении уравнения поперечных колебаний струны

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

где $u = u(x, t)$ имеет смысл поперечного смещения точки x струны (которое предполагается малым по сравнению с длиной струны) в момент времени t. Это так называемое волновое уравнение в одном измерении, о котором мы подробнее поговорим позже. Константа c имеет смысл скорости распространения колебаний вдоль струны, поскольку общее решение волнового уравнения на всей прямой, как нетрудно понять, имеет вид

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct),$$

где F и G – произвольные (дважды дифференцируемые) функции одной переменной. Первое слагаемое представляет собой возмущение, бегущее со скоростью c направо с сохранением своей формы, а второе – налево, и общее решение – их суперпозиция. Мы, однако, будем интересоваться решениями на отрезке $[0, L]$ с нулевыми граничными условиями $u(0,t) = u(L,t) = 0$ (струна с закрепленными концами). В этом случае решение в виде суперпозиции бегущих волн не годится.

Мы воспользуемся методом разделения переменных, который заключается в том, чтобы искать решение в виде $u(x,t) = f(x)g(t)$, где f – функция только от x, а g – только от t. Подставляя этот анзац в волновое уравнение, будем иметь

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{g''(t)}{g(t)}.$$

Левая часть – функция только от x и не зависит от t, правая – функция только от t и не зависит от x. Следовательно, обе части должны быть равны одной и той же константе, которую мы обозначим $-k^2$:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{g''(t)}{g(t)} = -k^2.$$

Тем самым имеем уравнения на функции f и g:

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0, \\ \\ g''(t) + c^2 k^2 g(t) = 0. \end{cases}$$

Из граничных условий $u(0,t) = f(0)g(t) = 0$, $u(L,t) = f(L)g(t) = 0$ вытекает, что $f(0) = f(L) = 0$. Для функции $g(t)$ никаких дополнительных условий не возникает. Итак, нам нужно решить задачу

$$\begin{cases} f''(x) + k^2 f(x) = 0, \\ \\ f(0) = f(L) = 0, \end{cases}$$

т.е. найти значения k^2 при которых существуют решения и найти эти решения. Это простейший пример задачи Штурма-Лиувилля. Таким образом, задача о колебаниях струны с закрепленными концами свелась к задаче о нахождении собственных значений и собственных функций оператора ∂_x^2 на отрезке.

Легко видеть, что при $k^2 < 0$ наша задача не имеет решений. При $k^2 > 0$ общее решение уравнения $f'' + k^2 f = 0$ имеет вид

$$f(x) = a\cos kx + b\sin kx.$$

Из граничных условий $a = 0$, $b\sin kL = 0$, откуда находим возможные значения k:

$$k = \frac{\pi n}{L}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Мы нашли собственные значения оператора ∂_x^2, равные $-\Big(\dfrac{\pi n}{L}\Big)^2$, $n \in \mathbb{Z}$, и отвечающие им собственные функции

$$f_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{L}.$$

Общее решение уравнения на функцию g при $k = \pi n/L$ имеет вид

$$g_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n c t}{L} + B_n \sin\frac{\pi n c t}{L},$$

где A_n, B_n – произвольные коэффициенты, тогда

$$u_n(x,t) = f_n(x) g_n(t) = \Big(A_n \cos\frac{\pi n c t}{L} + B_n \sin\frac{\pi n c t}{L}\Big)\sin\frac{\pi n x}{L},$$

а общее решение волнового уравнения для струны с закрепленными концами – их суперпозиция

$$u(x,t) = \sum_{n\ge 1} u_n(x,t).$$

Скажем несколько слов о смысле полученного решения $u_n(x,t)$. Тождества для тригонометрических функций позволяют представить его в виде

$$u_n(x,t) = C_n \cos(\omega_n t - \delta_n)\, \sin\frac{\pi n x}{L},$$

где

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \delta_n = \operatorname{arctg}\frac{B_n}{A_n}, \quad \omega_n = \frac{\pi n c}{L}.$$

Эта формула означает, что каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания с амплитудой $C_n\Big|\sin\dfrac{\pi n x_0}{L}\Big|$, что представляет собой стоячую волну. Величины ω_n называются собственными частотами колебаний струны, наименьшая из них, $\omega_1 = \pi c/L$, – основной тон.

Наконец, укажем, как полученное решение позволяет решить задачу с заданными начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ (от этих функций мы требуем, чтобы $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$, $\psi(0) = \psi(L) = 0$). Разложим функции φ, ψ в ряды Фурье:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n x}{L}, \quad \varphi_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{L}\,d\xi,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n x}{L}, \quad \psi_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{L}\,d\xi.$$

Тогда формулы

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{L} = \varphi(x),$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n c}{L} B_n \sin\frac{\pi n x}{L} = \psi(x)$$

позволяют отождествить

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{L}{\pi n c}\,\psi_n,$$

что и решает задачу с начальными условиями.

Цилиндрические функции, функции Бесселя. Волновое уравнение в двух измерениях имеет вид

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u = u(x, y, t).$$

Оно описывает поперечные колебания плоской мембраны. Разделяя переменные, т.е. ища решение в виде $u(x, y, t) = f(x, y)g(t)$, приходим к уравнению на собственные значения двумерного оператора Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$:

$$\Delta f + k^2 f = 0.$$

Рассмотрим колебания круглой мембраны радиуса R с закрепленной границей. В этом случае граничные условия имеют вид

$$f(x, y)\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}=R} = 0,$$

и f должна быть ограниченной функцией при $x^2 + y^2 \leq R^2$.

Для решения задачи удобно перейти к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и искать решения уравнения $\Delta f + k^2 f = 0$ методом разделения переменных в виде $f(x, y) = F(r)\Phi(\varphi)$. Запишем оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Подстановка анзаца $f(x, y) = F(r)\Phi(\varphi)$ в уравнение дает:

$$r^2\Big(\frac{1}{rF}\,\partial_r(r\partial_r F) + k^2\Big) = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

где λ обязана быть константой, т.к. левая часть зависит только от r, а правая – только от φ. Отсюда получаем уравнения на функции F, Φ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\Big(r\dfrac{dF}{dr}\Big) + \Big(k^2 - \dfrac{\lambda}{r^2}\Big)F = 0, \\ \\ \Phi'' + \lambda\Phi = 0. \end{cases}$$

Очевидно, функция Φ должна быть периодичной, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, т.е. представлять собой линейную комбинацию функций $\sin nx$, $\cos nx$ с целым n. Отсюда мы заключаем, что $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Введя новую переменную $x = kr$ и функцию $y(x) = F(r) = F(x/k)$, так что $F' = ky'$, запишем первое уравнение в виде

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(x\frac{dy}{dx}\Big) + \Big(1 - \frac{n^2}{x^2}\Big)y = 0$$

или

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \Big(1 - \frac{n^2}{x^2}\Big)y = 0.$$

В частности, если $\Phi = \mathrm{const}$, то $n = 0$, и мы имеем уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + y = 0.$$

В более общем случае рассматривают уравнение, в котором $n = \nu$ не обязательно целое:

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)y = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Бесселя. Его решения (не равные тождественно нулю) называются цилиндрическими функциями. Прямой подстановкой нетрудно проверить, что одно из решений дается рядом

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k+\nu}.$$

По признаку Даламбера ряд сходится при всех x и задает функцию $J_\nu(x)$, которая называется функцией Бесселя порядка ν.

Напомним определение и основные свойства Γ-функции, входящей в коэффициенты ряда для функции Бесселя:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(n+1) = n! \text{ при } n \in \mathbb{Z}_+, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Функция $\Gamma(x)$ регулярна при $x > 0$ и имеет полюсы первого порядка при $x = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Функции Бесселя с полуцелым ν выражаются через элементарные функции. Например:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \sin x,$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\ x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \cos x.$$

Если ν не является целым числом, $J_{-\nu}(x)$ есть второе линейно-независимое решение уравнения Бесселя. Если $\nu = n \in \mathbb{Z}$, то легко видеть, что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

т.е. функции $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ линейно зависимы. В этом случае второе линейно-независимое решение не ограничено при $x \to 0$. Приведем без доказательства выражение для асимптотики функции Бесселя при $x \to +\infty$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, \cos\Big(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) \,+\, O(x^{-3/2}).$$

Возвращаясь к нашей задаче на собственные значения, пишем решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \Big(1 - \frac{n^2}{x^2}\Big)y = 0$$

в виде

$$y(x) = J_n(x).$$

Наложение граничного условия $y(kR) = 0$ приводит к задаче о нахождении нулей функции Бесселя на положительной части вещественной оси, т.е. к решению уравнения $J_n(\mu) = 0$. Корни этого уравнения $\mu_1^{(n)} < \mu_2^{(n)} < \mu_3^{(n)} < \ldots$ являются трансцендентными. Их бесконечно много, и $\mu_m^{(n)} \to \infty$ при $m \to \infty$. Тем самым для собственных значений двумерного оператора Лапласа имеем

$$k_{n,m}^2 = \Big(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\Big)^2,$$

а собственная функция дается формулой $J_n\Big(\frac{\mu_m^{(n)} r}{R}\Big)\Phi_n(\varphi)$, где $\Phi_n(\varphi)$ – линейная комбинация функций $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$.

Другие цилиндрические функции. Наряду с функциями Бесселя большое значение для приложений имеют и другие цилиндрические функции. Приведем определение некоторых из них.

Функция Неймана $N_\nu(x)$ определяется формулами

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu}\Big(J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)\Big), \quad \nu \notin \mathbb{Z},$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right)\Bigg|_{\nu=n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функции Ханкеля первого и второго рода определяется формулами

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x),$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x).$$

Асимптотика функции Неймана при $x \to +\infty$ имеет вид

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin\Big(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) + O(x^{-3/2}).$$

Из сравнения с аналогичной формулой для функции Бесселя видно, что функция Бесселя аналогична косинусу, а функция Неймана – синусу, в то время как функции Ханкеля аналогичны экспонентам от мнимого аргумента типа $e^{\pm ix}$. Однако, в отличие от тригонометрических функций многие цилиндрические функции неограниченно возрастают при $x \to +0$. Например, лидирующая асимптотика функции $N_0(x)$ при $x \to +0$ такова: $N_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\log x + \ldots$. Имеются также аналоги экспоненты от действительного аргумента $e^{\pm x}$ – цилиндрические функции мнимого аргумента $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$.

Сферические функции. Сферические функции возникают при решении задачи на собственные значения для оператора Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ в трехмерном шаре:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad u = u(x, y, z)$$

с условием $u = 0$ на границе шара радиуса R. Естественно перейти к сферическим координатам r, θ, φ по формулам $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $x = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ (θ

меняется в промежутке от 0 до π, а φ – от 0 до 2π). Оператор Лапласа в сферических координатах принимает вид

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\theta,\varphi},$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Разделение переменных $u(r,\theta,\varphi) = f(r)v(\theta,\varphi)$ дает соотношение

$$\frac{(r^2f')' + k^2r^2f}{f} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}v}{v} = \mu,$$

в котором левая часть зависит только от r, а правая только от угловых координат θ,φ, и потому обе они должны быть равны некоторой константе, которую мы обозначили через μ. Отсюда получаем уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}(r^2f')' + \Big(k^2 - \dfrac{\mu}{r^2}\Big) = 0 \quad \text{с условием } f(R) = 0, \\[2ex] \Delta_{\theta,\varphi}v + \mu v = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Предположим, что $k \neq 0$ и сделаем в первом уравнении замену переменных

$$x = kr, \qquad y(x) = \sqrt{x}\,f(x/k),$$

тогда это уравнение принимает вид

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \Big(1 - \frac{\mu + \frac{1}{4}}{x^2}\Big) = 0,$$

что есть ни что иное, как уравнение Бесселя, так что его решениями являются какие-то цилиндрические функции. Но мы пока не можем сказать, какие именно, т.к. не знаем, какие значения может принимать μ.

Для выяснения этого вопроса надо рассмотреть второе уравнение, в которое входит то же самое μ. Его решение – функция $v(\theta,\varphi)$ – должно быть регулярно при всех $0 \le \theta \le \pi$ и периодично с периодом 2π: $v(\theta,\varphi+2\pi) = v(\theta,\varphi)$. Эти требования и дают ограничения на возможные значения μ. Будем решать второе уравнение тем же методом разделения переменных, представив решение в виде $v(\theta,\varphi) = P(\cos\theta)\Phi(\varphi)$, что дает

$$\frac{\sin\theta\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{dP(\cos\theta)}{d\theta}\Big) + \mu\sin^2\theta P(\cos\theta)}{P(\cos\theta)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = m^2,$$

откуда получаем уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\,\dfrac{dP(\cos\theta)}{d\theta}\Big) + \Big(\mu - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\Big)P(\cos\theta) = 0, \\[2ex] \Phi''(\varphi) + m^2\Phi(\varphi) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение имеет периодические решения только если $m \in \mathbb{Z}$: $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$. Рассмотрим первое уравнение и сделаем в нем замену $t = \cos\theta$, $t \in [-1, 1]$, тогда оно примет вид
$$\frac{d}{dt}\Big[(1-t^2)\frac{dP}{dt}\Big] - \frac{m^2}{1-t^2} + \mu P = 0$$
или
$$(1-t^2)P'' - 2tP' - \frac{m^2}{1-t^2}\,P + \mu P = 0.$$
Следующее простое наблюдение позволяет свести анализ этого уравнения к случаю $m = 0$. Произведя замену
$$P(t) = (1-t^2)^{m/2} p(t),$$
получим для функции $p(t)$ уравнение
$$(1-t^2)p'' - 2(m+1)tp' + (\mu - m(m+1))p = 0.$$
Продифференцировав уравнение с $m = 0$ m раз, получим для функции $P^{(m)}(t) = \partial_t^m P(t)$ то же самое уравнение, что мы вывели для $p(t)$. Отсюда делаем вывод, что решение уравнения с $m \neq 0$, которое мы обозначим $P^m(t)$, связано с решением $P^0(t)$ уравнения с $m = 0$ формулой
$$P^m(t) = (1-t^2)^{m/2}\,\frac{d^m P^0(t)}{d\,t^m}.$$

Учитывая сказанное, сосредоточимся на уравнении
$$(1-t^2)P'' - 2tP' + \mu P = 0.$$
Мы должны выяснить, при каких значениях μ у него есть решения, регулярные на отрезке $[-1, 1]$. При этом 1 и -1 являются особыми точками этого уравнения (поскольку коэффициент при старшей производной в этих точках обращается в 0), и существование регулярных решений на всем отрезке $[-1, 1]$ не очевидно и требует исследования. Нормируем решения условием $P(1) = 1$ и будем искать решения в окрестности точки 1 в виде ряда по степеням $s = t - 1$:
$$P(1+s) = 1 + \sum_{k\geq 1} \alpha_k s^k.$$
Прямая подстановка этого ряда в уравнение дает рекуррентное соотношение для коэффициентов α_k:
$$\alpha_{k+1} = \frac{\mu - k(k+1)}{2\,(k+1)^2}\,\alpha_k$$
с "начальным условием" $2\alpha_1 = \mu$. В случае если $\mu \neq k(k+1)$ при каком-либо целом k, все коэффициенты ряда ненулевые, и по формуле для радиуса сходимости находим, что он равен 2. Это означает, что в точке -1 (которая как раз находится на расстоянии 2 от точки 1) регулярность решения может нарушаться. В случае $\mu = n(n+1)$ при $n \in \mathbb{N}$ ряд обрывается на n-м члене и решение представляет собой полином степени n. Строгое доказательство того, что при других значениях μ ограниченных и квадратично интегрируемых решений нет, можно найти в книге [9]. Итак, мы выяснили, что при $\mu = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, у нашего уравнения есть регулярное решение $P_n(t)$, представляющее собой полином.

Запишем уравнение в виде

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Его регулярное решение $P_n(t)$ является полиномом степени n, который называется *полиномом Лежандра*. Для полиномов Лежандра существует явная формула (формула Родрига):

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n.$$

Нормировочный множитель выбран так, что $P_n(1) = 1$. Вот несколько первых полиномов Лежандра:

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{3}{2}\, t^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(t) = \frac{5}{2}\, t^3 - \frac{3}{2}\, t.$$

Из формулы Родрига очевидно, что $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$.

Функции

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m}\, P_n(t)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-t^2)(P_n^m)'' - 2t(P_n^m)' - \frac{m^2}{1-t^2}\, P_n^m + n(n+1)P = 0$$

и называются *присоединенными функциями Лежандра*.

Итак, мы нашли решения уравнения на собственные значения угловой части оператора Лапласа

$$\Delta_{\theta,\varphi} v + n(n+1)v = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

в разделенных переменных:

$$v(\theta,\varphi) = Y_n^m(\theta,\varphi) = P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm n.$$

Функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ называются *сферическими функциями*.

Теперь вернемся к уравнению Бесселя на радиальную часть собственной функции трехмерного оператора Лапласа, которое при $\mu = n(n+1)$ примет вид

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \left(1 - \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{x^2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что радиальная часть собственной функции выразится через функцию Бесселя с полуцелым индексом:

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(kr)$$

и принадлежит классу элементарных функций.

Наконец, обсудим случай $k = 0$, когда исходная задача сводится к нахождению гармонических функций в пространстве и при наложении нулевого граничного условия на сфере радиуса R имеет только тривиальное решение. Поэтому при $k = 0$ надо отказаться от этого условия. При $k = 0$ и $\mu = n(n+1)$ уравнение на радиальную часть принимает вид

$$f''(r) + \frac{2}{r}\, f'(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}\, f(r) = 0.$$

У него есть два линейно-независимых решения: $f(r) = r^n$ и $f(r) = r^{-n-1}$. Следовательно, частными решениями уравнения Лапласа в пространстве являются функции

$$r^n Y_n^m(\theta, \varphi) \quad \text{и} \quad r^{-n-1} Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Гармоническая функция общего вида представляется как линейная комбинация этих функций. Например, в таком виде можно искать решение задачи Дирихле. Отметим, что функция $r^n Y_n^m(\theta, \varphi)$ представляет собой гармонический однородный полином от x, y, z степени n.

Список литературы

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1973.

[2] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва, 1977.

[3] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва, 1959.

[4] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1985.

[5] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Москва, 2000.

[6] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1977.

[7] P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Conformal maps and integrable hierarchies*, Communications in Mathematical Physics, **213** (2000) 523–538.

[8] В.И. Арнольд, *Лекции об уравнениях с частными производными*, Фазис, Москва, 1999.

[9] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, Москва, 1984.