

Семинарский листок 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Открытые множества, компактность, канторово множество, предел последовательности, фундаментальные последовательности

1. Докажите, что каждое непустое открытое множество U на прямой является объединением не более чем счётного набора непересекающихся открытых промежутков.

2. Докажите, что замкнутое подмножество компакта всегда компактно.

3. Множество называется совершенным, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек. Докажите, что канторово множество совершенно.

4. Докажите, что канторово множество нигде не плотно, а дополнение к нему плотно.

5. Рассмотрим поле рациональных функций над \mathbb{R} . Приведите пример фундаментальной последовательности, которая не сходится.

6. Пусть $a > 0$. Докажите, что $a^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Более общо, пусть $x_n \in [\varepsilon, M]$, тогда $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow 1$.

7. Найдите пределы последовательностей

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 7n + 7} - \sqrt{n^2 + 5n + 5}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5^n + 7^n}{2} \right)^{1/n}, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$$

8. Найдите пределы последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где

$$(a) x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}, \quad (b) x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, x_1 = 1.$$

9. (a) Докажите, что последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ является возрастающей, а последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}_{n \in \mathbb{N}}$ является убывающей.

(b) Докажите, что пределы обеих последовательностей из пункта (a) совпадают. Это число есть основание натуральных логарифмов $e \approx 2,71828 \dots$

(c) Докажите неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ и покажите что оно влечёт

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

10. Докажите, что если $x_n/x_{n-1} \rightarrow A$, при $n \rightarrow \infty$, то $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow A$, при $n \rightarrow \infty$.

11. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_N > 0$. Найдите, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + \dots + x_N^n}$.

12. Найдите пределы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)^{n^2}$$