Задачи 1. 2.10.2023

1. Решите задачу 3.5 (см. конспект). А именно, докажите, что если последовательность случайных величин удовлетворяет формуле (2.3) для $k = N$, то она удовлетворяет ей и для всех $k < N$.

2. Небезызвестно, что математические способности нередко передаются от тестя к зятю. [1] Предположим, что 80% зятьев выпускников матфака также заканчивают матфак, а остальные — мех-мат, 40% зятьев выпускников мех-мата заканчивают мех-мат, а остальные поровну распределяются между матфаком и истфаком (why not!); зятья выпускников истфака же распределяются так: 70% заканчивают истфак, 20% — матфак и 10% мех-мат.
   1) Придумайте марковскую цепь, описывающую данный процесс.
   2) Найдите вероятность того, что зять зятя выпускника матфака закончит матфак.

3. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \ldots, \xi_T$ образует марковскую цепь со множеством состояний X. Докажите, что для любого $1 \le n < T$ и любых множеств $A \subset \underbrace{X \times \ldots \times X}_{T-n}$ и $C \subset \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n}$, а также любого $a \in X$, выполнено
$$\mathbb{P}\big((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A | \xi_n = a, (\xi_{n-1}, \ldots, \xi_0) \in C\big) = \mathbb{P}\big((\xi_T, \ldots, \xi_{n+1}) \in A | \xi_n = a).$$
   В частности, $\mathbb{P}(\xi_{n+k} = i | \xi_n = j, (\xi_{n-1}, \ldots, \xi_0) \in C) = \mathbb{P}(\xi_{n+k} = i | \xi_n = j)$.

4. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ образует МЦ со множеством состояний X. Рассмотрим инъекцию $f : X \mapsto X$. Обязана ли последовательность $f(\xi_0), f(\xi_1), \ldots$ также образовывать МЦ? А если не предполагать инъективности f? Если ответ отрицательный – приведите контрпример.

5. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \ldots, \xi_T$ образует МЦ. Обязана ли последовательность $\xi_T, \ldots, \xi_0$ образовывать МЦ?

[1] Вроде бы, эта поговорка пошла от Пикара, который был зятем Эрмита; google it.