Лекция 4, 28.09.2023

1. Динамика в пространстве распределений

Цель этого параграфа — научиться вычислять вероятности вида
$$\mathbb{P}(\xi_k = j).$$

<u>Опр. 1</u> Пусть η - случайная величина, принимающая значения в мн-ве $X \simeq \{1, 2, \dots\}$ — конечное либо счётное.

Тогда вектор $P_\eta = (p_1, p_2, \dots)$, где $p_j = \mathbb{P}(\eta = j)$, называется <u>распределением</u> случайной величины η.

Очевидно, $p_j \geq 0$ и $\sum\limits_{j \geq 1} p_j = 1$.

Если $|X| = \infty$, то P_η имеет счётное число компонент

<u>Обозначение</u> Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots$ — цепь Маркова. Тогда
$$p^{(k)} := P_{\xi_k} \quad \text{и} \quad p^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots).$$

$p^{(k)}$ - вектор-строка

То есть, $p_j^{(k)} = \mathbb{P}(\xi_k = j)$.

в момент времени k.

<u>Цель</u>: вычислить $p^{(k)}$ $\forall k \geq 1$.

<u>Опр. 2</u> Матрица $\Pi_n = (p_n(i,j))_{i,j \geq 1}$ называется матрицей переходных вероятностей (МПВ).

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} p_n(1,1) & p_n(1,2) & \dots \\ p_n(2,1) & p_n(2,2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Она имеет размер $|X| \times |X|$, то есть может быть бесконечной.

Утв. 3 $p^{(m)} = p^{(m-1)} \Pi_m$. $\forall m \geq 1$. (1)

В частности, $p^{(m)} = p^{(0)} \Pi_1 \dots \Pi_m$. ← умножение вектора-строки на матрицу

Д-во: $p_i^{(m)} = \mathbb{P}(\xi_m = i) = \sum\limits_{j \geq 1} \mathbb{P}(\xi_m = i \mid \xi_{m-1} = j)\, \mathbb{P}(\xi_{m-1} = j) =$

↑ ф-ла полной вероятности: $\Omega = \bigcup\limits_{j \geq 1} \{\xi_{m-1} = j\}$

$$= \sum_{j \geq 1} p_m(j,i)\, p_j^{(m-1)} = \left(p^{(m-1)} \Pi_m\right)_i.$$

Итого, $p^{(m)} = p^{(m-1)} \Pi_m$. $\boxed{\text{ч.т.д.}}$

|| Видим, что динамика в пространстве распределений $\boxed{\text{линейна}}$.

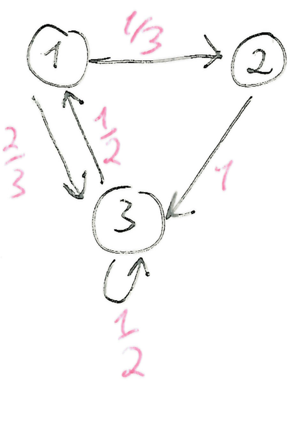
Если МЦ однородна, то мы упрощаем обозначения.
А именно, мы пишем $p_{ij} := p_k(i,j)$ – вероятности перехода

$\Pi := \Pi_n$ – МПВ.

Следствие 4 Для однородной МЦ имеем

$$\boxed{p^{(n)} = p^{(0)} \Pi^n} \qquad (2)$$

Пример 5



$p^{(0)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$p^{(2)} = ?$

$$p^{(2)} = p^{(0)}\Pi^2 = (p^{(0)}\Pi)\Pi = \left(0, \tfrac{1}{9}, \underbrace{\tfrac{2}{9}+\tfrac{2}{3}}_{=\frac{8}{9}}\right)\Pi = \left(\tfrac{4}{9}, 0, \tfrac{5}{9}\right).$$

это вычислительно проще, чем считать Π^2

Разложение МЦ "по базису" → задача.

Пусть имеется М.Ц. $\xi_0, \xi_1, \dots$ с МПВ Π_n и начальным распределением $p^{(0)}$. Рассмотрим набор МЦ $\xi_0^a, \xi_1^a, \dots,\ a\in X$, с теми же МПВ, и начальными распределениями

$$p^{(0),a} = (p_1^{(0),a}, p_2^{(0),a}, \dots),$$

где $p_i^{(0),a} = \delta_{ia} = \begin{cases} 1, & i=a \\ 0, & i\neq a \end{cases}$ – символ Кронекера.

То есть, цепи ξ^a имеют детерминистские начальные условия: стартуют в точке a.

Пусть $p^{(n),a}$ — распределение цепи ξ^a в момент времени n.

Тогда $p^{(n),a} = p^{(0),a}\underbrace{\Pi_1\cdots\Pi_n}_{M} = M_a$ – a-ая строка матрицы M.

С другой стороны, $p^{(n)} = p^{(0)}M = \sum\limits_{a\geq 1} p_a^{(0)} M_a = \sum\limits_{a\geq 1} p_a^{(0)} p^{(n),a}$.

Итого, $p^{(n)}$ представляется в виде линейной комбинации распределений $p^{(n),a}$ цепей ξ^a, имеющих детерминистские начальные условия. Значит, достаточно изучать только такие цепи.

<u>Опр. 6</u> Квадратная матрица $\underset{(a_{ij})}{\overset{}{A}}$ называется <u>стохастической</u>, если $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$ и $\sum_{j \geq 1} a_{ij} = 1 \ \forall i$.

МПВ – стохастическая. Поэтому изучение цепей Маркова это то же самое, что изучение линейной алгебры стохастических матриц. Поэтому нередко одни и те же результаты в теории МЦ имеют два доказательства: вероятностными средствами и средствами линейной алгебры. Вероятностные методы нередко оказываются проще. В итоге некоторые абстрактные теоремы линейной алгебры получают сравнительно простые вероятностные доказательства. См. теорему Перрона-Фробениуса ближе к концу курса.

---

2. <u>МЦ за n шагов</u>

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – однородная МЦ с МПВ П.

<u>Утв. 7</u> Последовательность $\xi_0, \xi_n, \xi_{2n}, \ldots$ образует МЦ с МПВ $П^n$.

<u>Лемма 8</u> Пусть $A_1 = (a^1_{ij})$, $A_2 = (a^2_{ij})$, … – набор квадратных матриц одного размера. Тогда

$$(A_1 \cdots A_n)_{ij} = \sum_{l_1, \ldots, l_{n-1} \geq 1} a^1_{il_1} a^2_{l_1 l_2} \cdots a^{n-1}_{l_{n-2} l_{n-1}} a^n_{l_{n-1} j}.$$

<u>Задача</u> Докажите лемму.

Д-во Утв. 7: Проверим, что выполнена формула (3.2).

Тогда Утв. 3.3 повлечёт требуемое утверждение.

$$\mathbb{P}(\xi_0=i_0, \xi_n=i_1, \dots, \xi_{kn}=i_k) = \sum_{\substack{l^1_1,\dots,l^1_{n-1};\\ l^2_1,\dots,l^2_{n-1};\\ \dots\\ l^k_1,\dots,l^k_{n-1}}}$$

$$\mathbb{P}(\xi_0=i_0, \underbrace{\xi_1=l^1_1,\dots,\xi_{n-1}=l^1_{n-1}}, \xi_n=i_1, \underbrace{\xi_{n+1}=l^2_1,\dots,\xi_{2n-1}=l^2_{n-1}}, \xi_{2n}=i_2,\dots)$$

$$= p^{(0)}_{i_0} \underbrace{\sum_{l^1_1,\dots,l^1_{n-1}} p_{i_0 l^1_1} p_{l^1_1 l^1_2} \dots p_{l^1_{n-1} i_1}}_{(\Pi^n)_{i_0 i_1}} \underbrace{\sum_{l^2_1,\dots,l^2_{n-1}} p_{i_1 l^2_1} \dots p_{l^2_{n-1} i_2}}_{(\Pi^n)_{i_1 i_2}} \sum_{l^3_1,\dots,l^3_{n-1}} \dots$$

$$= p^{(0)}_{i_0} (\Pi^n)_{i_0 i_1} (\Pi^n)_{i_1 i_2} \dots (\Pi^n)_{i_{n-1} i_n}$$

$\boxed{\text{ч.т.д.}}$

Обозначим $p^{(n)}_{ij}$ — вероятности перехода из состояния i в состояние j за n шагов для цепи $\xi_0, \xi_1, \dots$.

$$i \xrightarrow{n} j$$

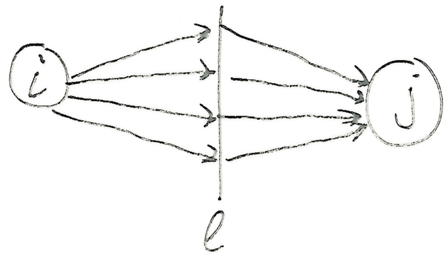
Это то же самое, что вероятность перехода за 1 шаг для цепи $\xi_0, \xi_n, \xi_{2n}, \dots$

(так как по определению и то, и другое, это $\mathbb{P}(\xi_n=j \mid \xi_0=i)$)

Следствие 9 $\quad p^{(n)}_{ij} = (\Pi^n)_{ij}$.

Следствие 10 (равенство Колмогорова–Чепмена) $\quad p^{(k+n)}_{ij} = \sum_{l \geq 1} p^{(n)}_{il} p^{(k)}_{lj}$

Интерпретация: чтобы перейти из состояния i в состояние j, нужно сложить произведения вероятностей перейти из i куда-нибудь, а затем оттуда в j.

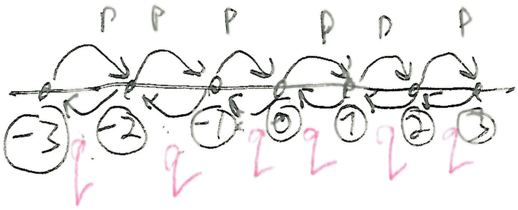


Кажется – очевидно. Но на самом деле здесь ключевую роль играет марковость.

Д-во: $(\Pi^{k+n})_{ij} = \sum_{l \geq 1} (\Pi^k)_{il} (\Pi^n)_{lj}$.

Аналогично – многомерное случайное блуждание

3. Пример: случайное блуждание



(*)

С вероятностью p идём направо, с вероятностью q – налево.

Точнее: пусть $\xi_0 \in \mathbb{Z}$ – случайная величина.

Пусть $\eta_j = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & q \end{cases}$ ← вероятности, $p+q=1$, η_j – независимы в совокупности ($\boxed{iid}$) ← и независимы от ξ_0

independent identically distributed.

Рассмотрим посл-ть с.в. $\xi_k = \xi_0 + \sum_{j=1}^{k} \eta_j$.

Утв. 11 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ – МЦ с вероятностями перехода

$$\Pi = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

– бесконечная в обе стороны, если пронумеровать состояния мн-вом $\mathbb{Z}$, как на картинке (*)

Д-во! $\mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \xi_0 = i_0) = \mathbb{P}(\eta_n = i_n - i_{n-1} \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \xi_0 = i_0) =$

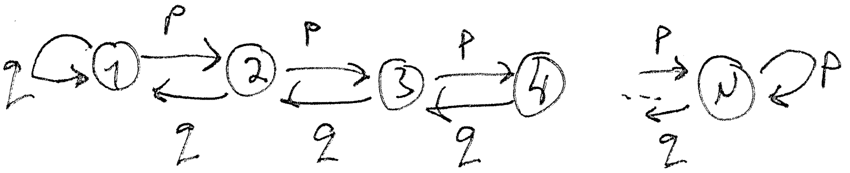
$$= \mathbb{P}(\eta_n = i_n - i_{n-1}) = \begin{cases} p, & i_n - i_{n-1} = 1 \\ q, & i_n - i_{n-1} = 0 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

так как η_n независима с $\xi_{n-1}, \dots, \xi_0$.

$$\mathbb{P}(\xi_n = i_n \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(\eta_n = i_n - i_{n-1} \mid \xi_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(\eta_n = i_n - i_{n-1})$$

$\boxed{\text{ч.т.д.}}$

Можно рассматривать случайное блуждание на отрезках конечной длины, накладывая граничные условия. Например, рассмотреть МЦ вида



Она уже не моделируется с помощью суммы iid случайных величин.

---

4. Примеры: модель Гальтона-Ватсона

Имеем последовательность с.в. $\xi_0, \xi_1, \dots$, где ξ_k моделирует размер популяции в поколении n. Эти случайные величины строятся следующим образом:

$\mathbb{N} \ni \xi_0$ — дана. Кроме неё даны с.в. η_k^i ($\mathbb{N} \cup \{0\}$), независимые в совокупности между собой и с ξ_0, и имеющие одинаковое распределение (iid).

$\boxed{\text{это с.в., принимающая значения в } \mathbb{N}}$

С.в. ξ_0 задаёт размер популяции в начальный момент времени, а η_k^i — число потомков у i-го индивидуума k-ого поколения.

Положим $\boxed{\xi_{n+1} = \eta_1^n + \eta_2^n + \dots + \eta_{\xi_n}^n}$ — каждый индивидуум разделился на случайное число новых.

$\xi_0 = 3$:

$\eta_0^1 = 0$ $\quad$ $\eta_0^2 = 2$ $\quad$ $\eta_0^3 = 1$ $\Rightarrow$ $\xi_1 = 3$

Пример реализации:

Нас интересует вероятность вымирания популяции.

<u>Задача</u> Докажите, что $\xi_0, \xi_1, \dots$ — МЦ.

<u>Теорема 12</u> $$\mathbb{P}(\exists n: \xi_n = 0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbb{E}\eta_n^i \le 1 \\ <1, & \text{если } \mathbb{E}\eta_n^i > 1, \end{cases}$$

если $\eta_n^i \not\equiv 1$ (запрещаем ситуацию, когда у каждого индивидуума всегда ровно один потомок).

очевидно, в этой ситуации $\xi_n = \xi_0 \ \forall n$.