

# Математические ~~основы~~ основы = 1 = Квантовой Механики, (осень 2020)

## Лекция №1

① Физические эксперименты, свидетельствующие о недействительности классической физики для описания свойств окружающего мира.

К последним десятилетиям 19го века классическая физика достигла пика своего более чем 300-летнего развития. Дошли старые разрывы — механики и оптики — в первом десятилетии 19го века были развиты основы термодинамики [1820-е годы (С. Карно, Ю.Р. Майер, Д. Джоуль), затем позже (Г. Гельмгольц, Дж. К. Максвелл, Д. У. Гиббс и другие) разработали основы статистической физики для изучения макроскопических проявлений молекулярной структуры вещества, тепловых явлений и т.п. Настоящим триумфом теории были открытие Дж. К. Максвеллом уравнение электромагнитного поля (середина 1850х годов) и



устойчивое электромагнитное = 2 =  
природы света.

Казалось, что открытые физические  
законы способны объяснить любые  
наблюдаемые явления. Один из крупней-  
ших физиков 19го века Уильям Томсон  
(лорд Кельвин) так охарактеризовал со-  
стоявшееся в науке положение: "На  
безоблачном небе науки я вижу только  
2 маленьких облачка: отрицательный  
результат опытов Маджельсона и пробле-  
му распределения энергии в излучении  
твёрдого тела".

В действительности, проблем было больше,  
но Кельвин ввёл 2 самых ярых,  
которые привели к пересмотру самих  
основ классической теории.

Опыт Маджельсона по измерению  
скорости света и поискам эфира -  
типовых среды, колебание ко-  
торой представляют собой световые  
волны - привели к отказу от понятия  
абсолютного времени и пространства  
и, в итоге, к появлению специальной  
и общей теории относительности.

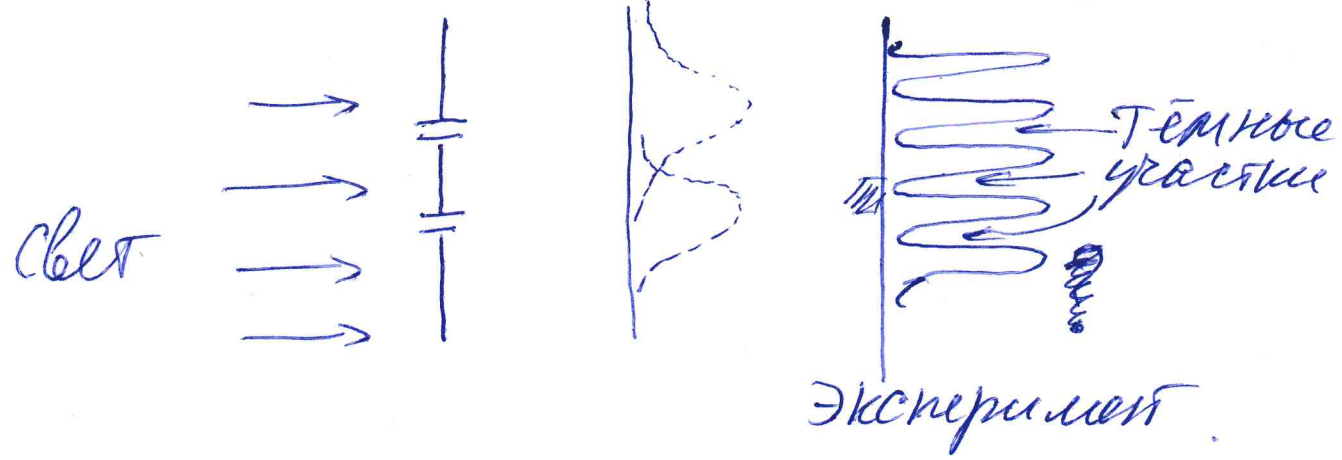
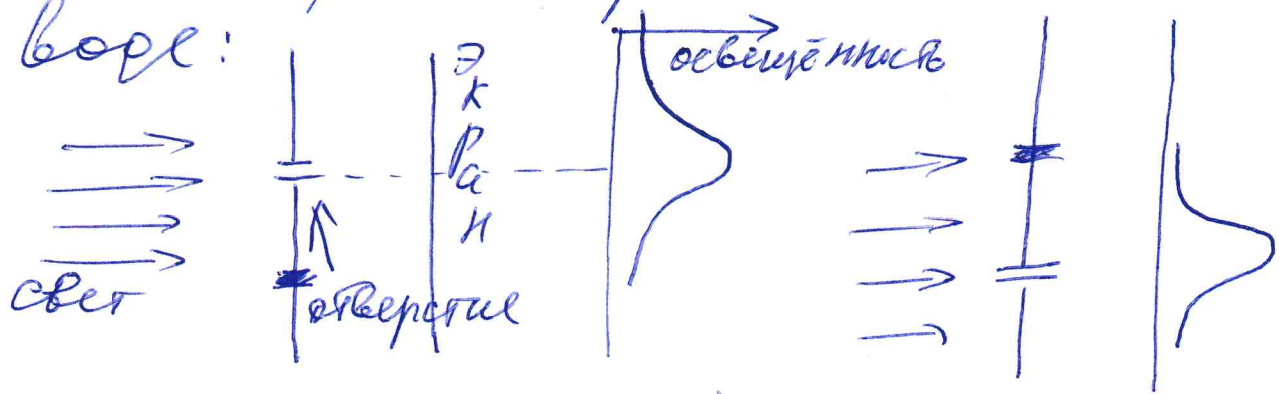


Этот сюжет разбирается в  $v = 3 =$   
курсе классической теории поля,  
мы же остановимся подробнее на  
втором "облачке" Лорда Кельвина -  
задаче о спектре излучения чёрного  
тела и так называемом корнукондрно-  
волновом дуализме света.

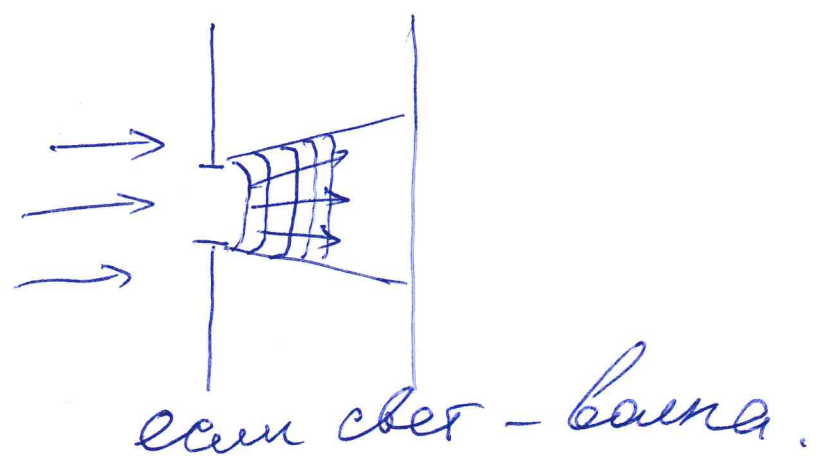
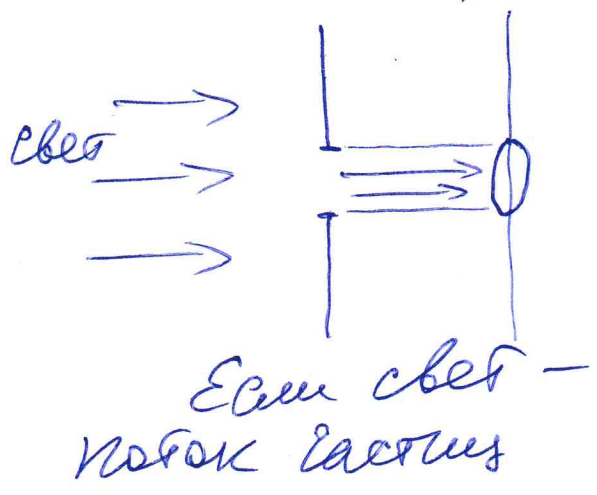
Ⓐ Свет: это волны или поток  
частиц?

В начале 19го века полевые работы  
Юнга по интерференции и Френеля по  
дифракции были безоговорочно приняты  
в качестве теории света. Интерференция  
и дифракция световых лучей  
невозможно объяснить на основе теории  
частиц. Юнг показал, что освещённость  
экрана от 2х отверстий не равна  
сумме освещённостей, создаваемых  
каждым отверстием по отдельности.  
Картина освещённости от 2х отверстий  
резко отличалась от простого наложения  
их освещённостей ~~на~~ от каждого  
отверстия: появлялись тёмные  
участки на месте простого освещён-

квех облакшей, как будѣт  
 мурей сѣе разныхъ свѣрстий гасили  
 друг друга. Похонсае картинка  
 наблюдаясь при наложении веек на  
 воре:



Опыт Френеля:





После открытия Дж. Максвеллом  $=5=$  электромагнитных волн (в теории) и экспериментально их обнаружения в опытах Герца стала ясна природа световых волн — это крайний случай сверх электромагнитного излучения определенной частоты. В связи с этим возникла задача о распределении энергии равновесного излучения, то есть, излучения, находящегося в термодинамическом равновесии с нагретым телом. Показавшему интенсивность излучения растет с ростом температуры, то равновесие восстановлено.

Тепловое излучение состоит из волн самых разных частот и, естественно, интересно узнать, как плотность потока энергии зависит от частоты волн.

□ Плотность потока энергии — это количество энергии, излучаемой за единицу времени с единицы площади поверхности тела.

□ Спектральная плотность потока энергии:  $\rho(\omega)$  ~~так~~ определяется



плотность потока энергии,  $= \nu =$   
 приходящая на единицу с частотами  
 от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ :  $\rho(\omega) d\omega$  — энергия  
 в интервале частот  $[\omega, \omega + d\omega]$ .

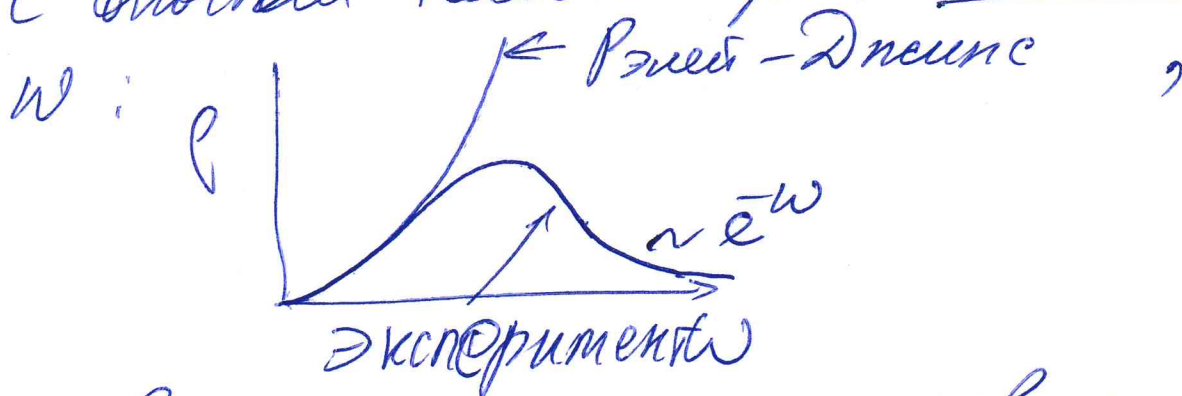
Тогда полная плотность потока  
 энергии  $R = \int_0^{\infty} \rho(\omega) d\omega$  — функция  
 температуры  $T$  нагреваемого тела.

Однако, применение самых общих за-  
 конов термодинамики дало закон

Рэля - Денниса:  $\rho(\omega) = A \omega^2 T$ ,

где  $A$  — размерная константа.

Основная проблема с этой формулой  
 не в том, что она согласовывалась  
 с опытом только для малых частот



а в том, что она давала  $\infty$   
 значение полного потока  $\int_0^{\infty} \omega^2 \rightarrow \infty!$



Тайна Эйнштейна гласит этот  $= \hbar =$   
результат "ультрафиолетовой  
катастрофы", поскольку он означал,  
что равновесие с излучением невоз-  
можно и любое нагретое тело  
должно мгновенно выбрасывать всю  
свою энергию в виде излучения и  
охлаждаться до абсолютного нуля.

Фундаментальная проблема этого на-  
правления заключалась в том, что  
вещество имеет конечное число степе-  
ней свободы (число атомов хотя и  
очень велико, но конечно), а излучение -  
- до бесконечных степеней свободы.

В октябре 1900 года Макс Планк  
выдвинул гипотезу квантов. Он предпо-  
ложил, что энергия на зарядной  
частоте  $\omega$  может излучаться только  
"порциями", кратными  $\hbar\omega$ , где  $\hbar$  -  
константа. Меньше, чем  $\hbar\omega$  на  
частоте  $\omega$  излучаться не может.

Эта загадочная гипотеза совершенно  
противоречила классической теории,



согласно которой энергия волн  $\omega = \hbar \omega$  любой частоты непрерывна и может быть сколь угодно мала.

Однако предположение Планка полностью устранило "ультрафиолетовую катастрофу". Его расчёт дал для спектральной плотности такой ответ

$$\rho(\omega) = \tilde{A} \frac{\omega^3}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right)},$$

где  $k$  - газовая постоянная - постоянная Больцмана. Эта формула не просто давала конечный  $\int_0^\infty \rho(\omega) d\omega$ , но и прекрасно согласовывалась с опытным данными. Кстати, при малых  $\omega$ , когда  $\hbar\omega \ll kT$  получался закон Рэлея - Дендрса.

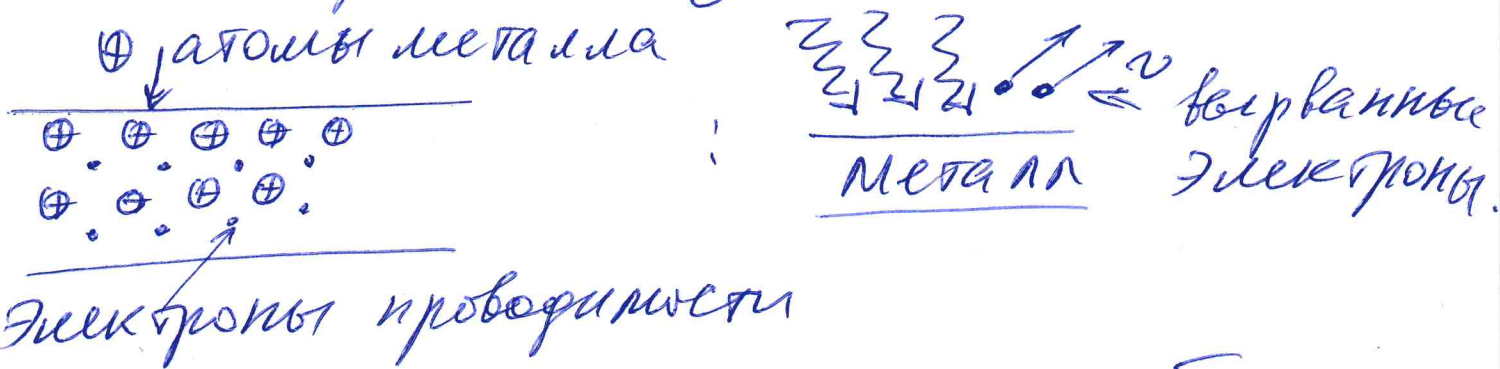
Благодаря этому экспериментальному согласию гипотезу Планка приняли как удобный математический приём. Кванты не рассматривались как реально существующие объекты, свет, по-прежнему, считался по-прежнему "непрерывной" материальной сущностью.



# Фотоэффект

= 9 =

Явление фотоэффекта было обнаружено в 1887 году Герцем и впоследствии исследовалось русскими физиками Столетовым. Заключалось оно в том, что при освещении некоторых металлов световая волна вырывает из них электроны:



Даже в том, что само по себе электрон не может покинуть металл: в поверхностном слое металла на него действует сила со стороны атомов решетки, направленная внутрь вещества.

Чтобы преодолеть это притяжение, электрон должен получить некоторую энергию (зависит от природы металла) — так называемую работу выхода. Эту энергию ему передает свет. Согласно закону сохранения энергии:

$$E_{\text{света}} = A_{\text{вых}} + \frac{mv^2}{2},$$

где  $v$  — скорость вырванного электрона.



Согласно этой формуле фотоэффект  $= 10 =$  должен наблюдаться при достаточной большой энергии  $E_{\text{света}} > A_{\text{вых}}$ . Энергия световых волн зависит от амплитуды колебаний составляющих её электромагнитных полей (пропорциональна квадрату амплитуды). Поэтому с ростом яркости лампы (большая энергетическая мощность) должна расти и скорость фотоэлектронов.

Однако законы фотоэффекта, установленные в опытах Стоунорфа, резко отличались от предсказаний классической теории и не могли быть объяснены с её помощью. Это объяснялось следующим:

- Энергия фотоэлектронов не росла с увеличением яркости лампы (т.е. с ростом  $E_{\text{света}}$ ). Увеличивалось число фотоэлектронов, которые брали на себя всю энергию световой волны, но для каждой фиксированной частоты света существовала предельная кинетическая энергия фотоэлектрона  $\frac{m v_{\text{max}}^2}{2}$ , который не превышался



ни одним из фотоэлектриков,  $=11=$   
скаль бы сильной ни была яркость  
освещения. А вот от частоты света  
(т.е. от его цвета)  $\nu_{\max}$  зависела  
отнюдь сильно: с ростом частоты  
кинетическая энергия  $\frac{m\nu_{\max}^2}{2}$  росла  
линейно

• Существовала красная граница  
эффекта: минимальная частота  $\omega_{кр}$ ,  
ниже которой фотоэлектроны не появля-  
лись ни при какой яркости лампы.  
Вся энергия  $E_{\text{света}}$  шла только  
на нагрев среза металла, но ни  
одно фотоэлектрона освободить не  
могла, несмотря на значительное  
превышение  $E_{\text{света}}$  над величиной  
Авых.

• Фотоэффект (при  $\omega > \omega_{кр}$ ) всегда  
наблюдается сразу после включения осве-  
щения, без всякой временной задержки.  
Но, согласно классической теории, это  
невозможно, так как световой волне  
требуется время, чтобы "раскачать"



электрон и передать ему  $= \frac{1}{2} =$   
энергию, большую  $A_{вых}$ . Согласно  
расчётам, фотоэффект должен был  
возникать с задержкой порядка  $\frac{1}{c}$  се-  
кунды. Кроме того, эта задержка  
должна увеличиваться с ослаблением  
яркости источника — слабей выкинуть  
больше времени на увеличение энергии  
электрона до порогового значения  $A_{вых}$ .  
Однако фотоэффект всегда возникал  
мгновенно, или не наблюдался вовсе  
(при  $\omega < \omega_{кр}$ ).

Все эти противоречия были устрани-  
мы А. Эйнштейном, который предполо-  
жил, что световая волна с частотой  
 $\omega$  поглощается веществом порце  
Планковскими квантами  $\hbar\omega$ . Тогда  
закон сохранения энергии при  
поглощении электроном такого кванта  
будет иметь вид:

$$\hbar\omega = A_{вых} + \frac{mv^2}{2}, \text{ или}$$

$$\boxed{\frac{mv^2}{2} = \hbar\omega - A_{вых}}$$

Эта формула объясняет всё



и прекрасно согласовывалась  $= \lambda =$   
с опытом. Например, красная  
граница фотоэффекта совпадает усло-  
вием  $\nu > 0$   $h\nu_{кр} = A_{вых}$ .

С ростом яркости источника, растет  
количество квантов  $h\nu$  и, следовательно,  
большее количество электронов имеют возможность  
вылететь из металла, поскольку имеют  $h\nu$ .  
То есть, число фотоэлектронов растет,  
а их максимальная кинетическая  
энергия  $\frac{mv^2}{2} = h\nu - A_{вых}$  — может уве-  
личиться только с ростом  $W$ .

Ну и, наконец, возможность фотоэф-  
фекта тоже объясняется этим ме-  
ханизмом: поглощение кванта ана-  
логично столкновению электрона с  
гасицей — он сразу приобретает нуж-  
ную кинетическую энергию, без  
"ракетки" и временной задержки.

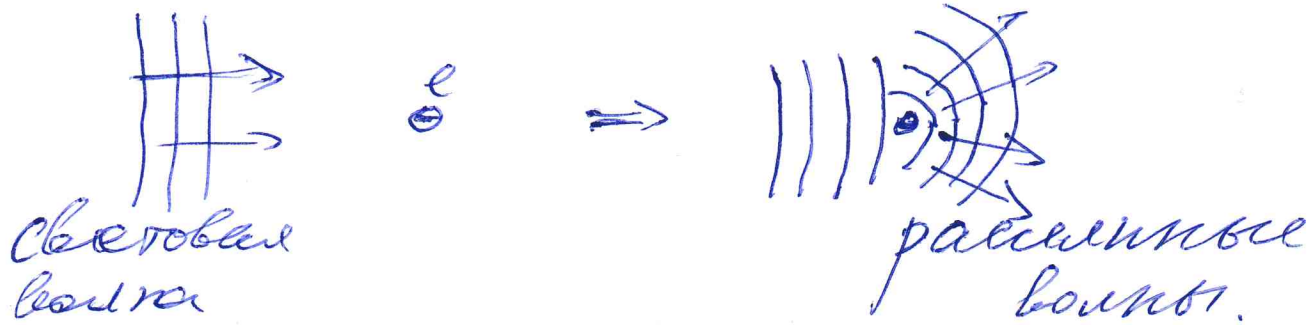
Итак, свет излучается квантами,  
поглощается квантами, а в опытах  
по рассеянию на электронах пришлось



признать, что он и расиространяе = |4 =  
еися квантими.

## Эффект Комптона

Рассеяние световых волн на свободных  
электронах тоже пришло в противо-  
речие с классической теорией:



Согласно классической картине рассея-  
ние на препятствии волны должны  
иметь ту же частоту, что и падаю-  
щие на препятствие исходные волны.

Но при рассеянии на электроне часто-  
та рассеянных волн менялась. И  
чем выше была и падающей волны  
тем сильнее проявлялся этот эффект.

Кроме того, проверка электрона после  
рассеяния тоже отличалась от предска-  
заний классической теории. Но все  
экспериментальные данные прекрасно  
объясняются, если допустить, что



расцениваются световые волны с  $\hbar\omega = \hbar\nu =$   
тотой  $\omega$  и выигрывает как столкнове-  
ние электрона с частицей,  
имеющей энергию  $\hbar\omega$  и импульс

$\vec{p} = \hbar \vec{k}$ , где волновой вектор  $\vec{k}$   
совпадает с направлением светового  
луча, а его модуль равен  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$ ,  
где  $c$  - скорость света.

Эти же предположения о световых  
частицах с такой энергией и импуль-  
сом хорошо согласовывались с опытом  
Лебедева по измерению давления света  
на призму.

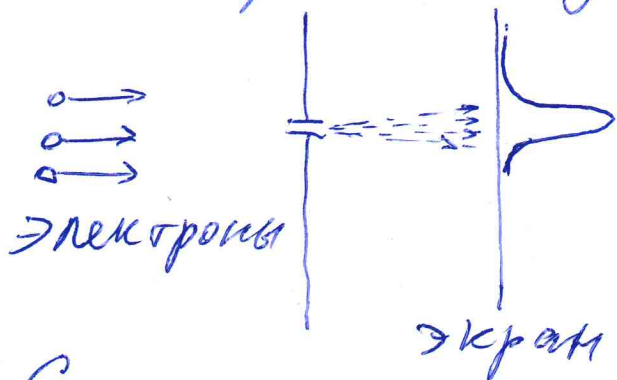
Итак, выходя из того, что световая волна  
излучается квантами, распространяе-  
тся квантами и поглощается кван-  
тами. Квант или световую частицу  
назвали фотоном.

Однако теперь вопрос о том, как  
множество отдельных фотонов, из  
которых состоит световая волна,  
может проявлять волновые свойства  
(коллективный эффект) превратился в  
загадку.



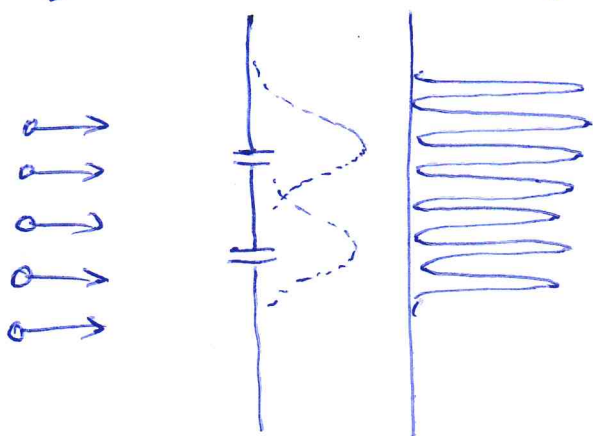
⑤ Рассеяние электронов: новые факты о корпускулярно-волновом дуализме. = 16 =

Опыты по рассеянию электронов на кристаллах выявили удивительные свойства этих частиц. В определенных условиях у них проявились волновые свойства. Пучок электронов напоминает световую волну:



На экране отмечаются места, куда попали прошедшие отверстия электроны.

Если добавить ещё одно отверстие, то возникает интерференционная картина:



Распределение вл 2х отверстий напоминает интерференционную картину волн с частотой  $\omega$

$$p = \frac{h\omega}{c}$$

где  $p$  - импульс электрона. Эта формула совпадает со скоростью импульса



Фотон и частота световых  $= 17 =$   
волны, которую они образуют.

Более того, интерференционная картина сохраняется, даже если электроны направлялись на экран по одному.

Это означает, что волновые свойства не могут объяснить взаимодействие электронов в пучке, они должны быть присущи каждому электрону.

Анализ результатов этих опытов привел к отказу от попыток описать движение электрона в терминах классической механики: координат, импульсов и траекторий. Интерференционная картина не совместима с допущением, что

каждый электрон проходит через одно из открытых отверстий. Попытки возмещать это — разрушали интерференцию.

Кроме того, выяснилось, что невозможно с произвольной точностью одновременно

~~точно~~ локализовать электрон в пространстве с "неопределенностью"  $\Delta x$  и измерить  $x$ -компоненту его импульса с  $\Delta p_x$ . Эти

"погрешности" обязаны удовлетворять



Соотношение неопределенностей = 18 =  
Гейзенберга  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$ .

Фундаментальная причина такого неопределенности для систем в том, что в микромире невозможно пренебречь воздействием на систему процедур измерения. Например, для определения положения электрона во каро "подсветить" тучкой фотонов и отметить место, где произошло рассеяние этих фотонов. Но при рассеянии фотоны передают электрону импульс и, тем самым, вносят неопределенность в эту характеристику электрона.

И, наконец, основательной удар по попыткам классического мышления явилось микромира наличие неслучайное структуры атома.

~~XXXXX~~  
(В) Планетарная модель атома и  
Теория Нильса Бора.

В 1911 году, проведя эксперименты по рассеянию так называемых  $\alpha$ -частиц (ядро атома гелия) на металлической фольге, английский физик



Эрнест Резерфорд обнаружил,  $=9=$   
что некоторые  $\alpha$ -частицы отража-  
ются от фольги назад. Существовавшая  
тогда теория строения атомного ядра  
исключала такую возможность. Сам  
Резерфорд образно охарактеризовал ре-  
зультаты своих экспериментов такими  
словами: "Отражение  $\alpha$ -частиц столь  
же невероятно, как если бы вы  
выстрелили из корабельной пушки  
в лист папирусной бумаги и снаряд  
отразился бы от него".

Расчеты показали, что где-то внутри  
 $\alpha$ -частицы положительный заряд атома  
должен быть сосредоточен в очень  
малой области  $\sim 10^{-13}$  см, при обычных  
размерах атома  $\sim 10^{-8}$  см. Эту малую  
область положительного заряда назвали  
ядром атома. В нем сосредоточена  
практически вся масса атома.

Резерфорд предложил теорию, что  
атом напоминает солнечную систему.  
В центре - положительное заряженное



=20=

Ядро, вокруг которого по  
замкнутой орбите вращаются  
электроны.

Такая "планетарная модель" атома  
имела существенный недостаток.

Согласно классической электродинамике  
Максвелла, ускоренно движущийся заряд  
излучает электромагнитные волны и,  
как все тела, теряет энергию, уносимую  
этими излучениями. Простой расчет пока-  
зывает, что за ничтожное время  $\sim 10^{-9}$  сек  
электроны должны излучать свою энер-  
гию, которой они обладают на орби-  
тах атома, и упасть на ядро. Планетарная  
модель не может существовать  
с точки зрения классической физики.

В 1913 году Нильс Бор ввел в  
теорию о стационарных орбитах.

Согласно этой теории, в пространстве  
вокруг ядра существуют некоторые  
высшие дискретные орбиты,  
лежащие на которых электроны не



излучают электромагнитные волны и может существовать на этих орбитах как фото газ.

Положение стационарных орбит рассчитывалось на основе уравнения квантования Бора - Зоммерфельда.

При переходе с одной стационарной орбиты на другую электрон излучает энергию в виде фотона, частота которого зависит от разностей энергий стационарных орбит:

$$h \nu_{nm} = E_m - E_n.$$

Эта теория хорошо объяснила спектр излучения водорода, частоты которого параметризовались целыми числами:

$$\nu_{mn} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \\ m > n.$$

Теория Бора позволила с высокой точностью ввести константу  $R$  и предсказывать энергию стационарных орбит вида  $E_m \sim \frac{1}{m^2}$ .

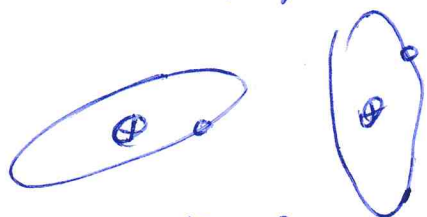


Однако её успех был частичным.  $= 22 =$

Она хорошо описывала спектр излучения водорода, но совершенно не годилась для определения спектров цезия и других атомов.

Кроме того, теория Бора опиралась на понятия аппарата классической механики (орбиты электрона) и никак не объяснила, почему на стационарных орбитах отсутствует классическая электромагнитика.

К тому же, опыты по рассеянию атомарного водорода показали, что атомы этого газа рассеиваются как реально круглые шары, а не диски



как гайки

следовать из теории орбит Бора.

В ~~1924~~ 1924-1927 годах произошёл окончательный отказ от классического языка в микромире и в работах В. Гейзенберга, Э. Шрёдингера, П. Дирака и других была создана современная квантовая механика.