8 Лекция 8. Линейные неавтономные уравнения высших порядков: общая теория

8.1 Линейные уравнения высших порядков: сведение к системам

Линейное уравнение порядка n — это уравнение вида

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + ... + a_0(t)x = 0, \tag{1}$$

где функции $a_j : I \to \mathbb{R}$ непрерывны на интервале I вещественной прямой. Уравнение (1) сводится к системе уравнений первого порядка по общей схеме. А именно, положим:

$$y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}, ...,\ y_n = x^{(n-1)}.$$

Тогда

$$\dot{y} = A(t)y \tag{2}$$

где матрица оператора A имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & ... & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Начальное условие для системы (3)

$$y(t_0) = y^0$$

соответствует следующему начальному условию для уравнения (1):

$$x(t_0) = y_1^0,\ \dot{x}(t_0) = y_2^0, ..., x^{(n-1)}(t_0) = y_n^0. \tag{4}$$

Поэтому справедлива следующая теорема существования и единственности для линейных неавтономных уравнений, которая сразу следует из аналогичной теоремы для систем.

Теорема 1 *Для непрерывных функций* $a_j \colon I \to \mathbb{R}$ *уравнение* (1) *с начальным условием* (4) *имеет единственное решение, определенное на интервале* I.

8.2 Теорема об изоморфизме

Справедлива также следующая теорема об изоморфизме, которая сразу следует из аналогичной теоремы для систем.

Теорема 1 *Пространство решений уравнения* (1) — n*-мерное векторное пространство, изоморфное пространству начальных условий.*

Поэтому для того, чтобы решить уравнение (1), достаточно найти n линейно независимых его решений — фундаментальную систему решений. Остальные решения будут линейными комбинациями этих решений.

Следующие два раздела повторяют материал прошлой лекции для уравнений высших порядков вместо систем.

8.3 Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского

Определение 1 *Определитель матрицы*

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{5}$$

называется определителем Вронского *для системы функций* x_j *и обозначается* $W(x_1, \dots, x_n)$.

В частности, определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (1) — это определитель Вронского соответствующей фундаментальной системы решений для системы уравнений (2), (3).

По формуле Лиувилля-Остроградского для систем, определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (1) $W(t) := W(x_1(t), \dots, x_n(t))$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{W} = -a_{n-1}(t)W,$$

поскольку след матрицы (3) равен $-a_{n-1}(t)$. Это позволяет легко найти $W(t)$.

Выполнен следующий критерий линейной независимости решений уравнения (1).

Предложение 1 *Набор из* n *решений* $x_1, \dots, x_n$ *уравнения* (1) *является фундаментальной системой решений тогда и только тогда, когда определитель Вронского* $W(x_1, \dots, x_n)$ *не обращается в ноль хотя бы в одной точке. В этом случае определитель Вронского нигде не обращается в ноль.*

Доказательство Для линейно зависимых решений уравнения (1) определитель Вронского тождественно равен нулю, поскольку столбцы матрицы (5) линейно зависимы.

Если же определитель Вронского обращается в ноль в одной ьочке, то столцы соответствующей матрицы линейно зависимы. Тогда и соответствующие решения линейно зависимы по теореме об изоморфизме. □

8.4 Составление уравнения по решениям

Какие функции могут служить фундаментальной системой решений для линейного уравнения порядка n?

Ответ даёт следующее предложение.

Предложение 2 *Любые n функций $x_j\colon I \to \mathbb{R}$ класса C^n, для которых определитель Вронского $W(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ не равен нулю при всех $t \in I$, являются фундаментальной системой решений некоторого уравнения порядка n на отрезке I с непрерывными коэффициентами.*

Доказательство Искомое уравнение имеет вид:

$$\frac{W(x_1(t), \ldots, x_n(t), y(t))}{W(x_1(t), \ldots, x_n(t))} = 0.$$

Знаменатель нужен для того, чтобы старший коэффициент был равен 1. Уравнение получается разложением определителя в числителе по последнему столбцу. Функции $x_j(t)$ являются его решениями, потому что определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю. □

8.5 Линейные неоднородные уравнения: метод вариации постоянных

Линейным неоднородным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = b(t). \tag{6}$$

Если линейное однородное уравнение (1) решено, то соответствующее неоднородное уравнение (6) всегда можно решить методом вариации постоянных.

Соответствующая система линейных уравнений имеет вид:

$$\dot{y} = A(t)y + \tilde{b}(t), \tag{7}$$

где $A(t)$ — та же матрица, что и в (3), а $\tilde{b}(t) = (0, 0, \ldots, b(t))^t$.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения (1), и

$$X = \begin{pmatrix} x_1, \ldots & x_n \\ \vdots & \\ x_1^{(n-1)} \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

— соответствующая фундаментальная матрица решений системы (3). В соответствии с методом вариации постоянных для систем , общее решение системы (7) имеет вид $y = Xc(t)$, где вектор-функция $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))^t$ находится из уравнения

$$\dot{c} = X^{-1}\tilde{b}. \tag{8}$$

Учитывая связь между уравнением (6) и системой (7) получаем, что решение уравнения (6) имеет вид

$$x(t) = x_1(t)c_1(t) + \cdots + x_n(t)c_n(t). \tag{9}$$

Можно сказать, что мы взяли формулу для общего решения однородного уравнения $x = c_1x_1 + \ldots c_nx_n$ и *проварьировали постоянную*, заменив постоянный вектор $c = (c_1, \ldots, c_n)^t$ переменным; отсюда происходит название метода.