6 Лекция 6. Основные теоремы 2

6.1 Неравенство Гронуолла для произвольного n

Теорема 1 *Неравенство Гронуолла остается справедливым, если $x \in \mathbb{R}^n$.*

То же рассуждение, что при $n = 1$, но в доказательстве леммы ψ^2 заменяется скалярным квадратом (ψ, ψ).

6.2 Теорема единственности

Теорема 2 *Через каждую точку расширенного фазового пространства C^1-гладкого неавтономного уравнения проходит не более, чем одна интегральная кривая.*

Та же теорема более подробно.

Теорема 3

$$\dot{x} = f(t, x), \;\; (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1}$$

Пусть f непрерывна в Ω по (t, x) и удовлетворяет условиям Липшица по x:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Тогда для любого $(t_0, x_0) \in \Omega$ задача Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

имеет не более одного решения.

Доказательство Пусть φ и ψ - два решения с одинаковым начальным условием при $t = 0$. В силу неравенства Гронуолла, если $\varphi(0) = \psi(0)$, то

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\varphi(0) - \psi(0)|e^{L|t|} = 0.$$

$\square$

6.3 Теорема о непрерывной зависимости (усиленная формулировка)

Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (2).

Теорема 4 . *Пусть правая часть уравнения (1) непрерывна по совокупности переменных и липшицева по x. Тогда для любого $(t_0, a) \in \Omega$ существует окрестность $I \subset \mathbb{R}$ точки t_0 и окрестнось $U \subset \mathbb{R}^n$ точки a такие, что решение уравнения (1) $\varphi(t, x_0)$ определено для любого $t \in I$ и $x_0 \in U$. При этом решение $\varphi(t, x_0)$ непрерывно по x_0.*

6.4 Теорема о гладкости

Теорема 5 *Если в условиях предыдущей теоремы* $f \in C^r(\Omega)$, *то* $\varphi \in C^r(I \times U)$.

6.5 Теорема о выпрямлении

Теорема 6 *В условиях теоремы 4 для любой точки* $(t_0, x_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *существует окрестность* U *точки* (t_0, x_0) *(называемая трубкой траекторий) и гомеоморфизм* $F : U \to \mathbb{R}^{n+1}$, *переводящий интегральные кривые уравнения* (1) *в интегральные кривые уравнения* $\dot{x} = 0$ *с сохранением времени:*

$$F(t, \varphi(t.x)) = (t, x).$$

Напомним, что $\varphi(t_0, x) = x$.

Следствие из этой теоремы будет доказано сейчас.

6.6 Глобальная теорема о непрерывной зависимости

Теорема 7 *Пусть в условиях теоремы 4 решение уравнения* (1) *определено на (большом) интервале* I. *Тогда для любого отрезка* $\sigma \subset I$ *существует окрестность* $U \subset \mathbb{R}^n$ *точки* x_0 *такая, что для любого* $x \in U$ *решение* $\varphi(t, x)$ *определено на* σ *и непрерывно по* t, x.

Доказательство В теореме о выпрямлении обозначим через U_t пересечение $U \cap \{t\} \times \mathbb{R}^n$, и через F_t ограничение $F|_{U_t}$. Тогда определено отображение

$$g^{t_1,t_2} : U_{t_1} \to U_{t_2}$$

вдоль интегральных кривых уравнения (1) для любых t_1, t_2, достаточно близких к t_0.

Пусть теперь a, b - концы отрезка σ. Нужно доказать существование отображения $g^{t_0,b}$ ($g^{t_0,a}$) для некоторых окрестностей точек $(t_0, x_0), (b, \varphi(b, x_0))$ (соответственно, $(a, \varphi(a, x_0))$).

Пусть γ - -замкнутая дуга интегральной кривой над отрезком σ. Покроем γ трубками траекторий и выберем конечное подпокрытие. Пусть $(t_0, x_0), ...(t_k, x_k),\ t_k = b$ - последовательность точек на γ такая, что любые две соседние точки принадлежат одной трубке траекторий. Тогда существуют окрестности $U_j \subset V_j \subset \mathbb{R}^n$ точек x_j и отображения

$$g^{t_{j-1},t_j} : U_{t_{j-1}} \to V_{t_j}.$$

Композиция

$$g^{t_0,b} : U_{t_0} \to U_b = g^{t_{k-1},b} \circ ... \circ g^{t_0,t_1} :$$

определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна. Аналогично исследуется отображение $g^{t_0,a}$. $\square$