5 Лекция 5. Основные теоремы.

5.1 Лемма Пуанкаре

Напоминание.

Определение 1 1- *форма* $\omega = fdx + gdy$ *называется* замкнутой, *если*

$$f_y = g_x,$$

и точной, *если существует функция, называемая потенциалом, такая что*

$$\omega = dF.$$

Всякая точная 1-форма с C^2-гладким потенциалом замкнута. Это следует из теоремы о равенстве смешанных производных.

Лемма 1 *Лемма Пуанкаре. Замкнуиая* C^1*-гладкая* 1*-форма точна, если она задана в односвязной области.*

Мы докажем эту лемму для форм, заданных в области, которая вместе с каждыми двумя точками A и B содержит не только отрезок AB, но и прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и диагональю AB.

Доказательство Пусть форма ω имеет вид $fdx + gdy$, и $f_y = g_x$. Построим ее потенциал F по следующей формуле:

$$F(x, y) = \int_0^x f(\xi, 0)d\xi + \int_0^y g(x, \eta)d\eta.$$

Мы хотим доказать, что

$$F_x = f, \;\; F_y = g.$$

Вторая из этих формул очевидна. Докажем первую.

$$F_x = f(x, 0) + \int_0^y g_x(x, \eta)d\eta.$$

В силу замкнутости формы ω,

$$F_x = f(x, 0) + \int_0^y f_y(x, \eta)d\eta = f(x, 0) + (f(x, y) - f(x, 0)) = f(x, y).$$

□

5.2 Теорема существования и единственности

Перейдем к основным теоремам.

Теорема 1 *Через каждую точку расширенного фазового пространства C^1-гладкого неавтономного уравнения проходит одна и только одна интегральная кривая.*

Теорема 2

$$\dot{x} = f(t, x), \ (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}. \tag{1}$$

Пусть f непрерывна в Ω по (t, x) и удовлетворяет условиям Липшица по x:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Тогда для любого $(t_0, x_0) \in \Omega$ задача Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

имеет единственное решение.

5.3 Теорема о непрерывной зависимости

Обозначим через $\varphi(t, x_0)$ решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (2).

Теорема 3 *. В условиях теоремы 2 для любого $(t_0, a) \in \Omega$ существует окрестность $I \subset \mathbb{R}$ точки t_0 и окрестнось $U \subset \mathbb{R}^n$ точки a такие, что решение (1) $\varphi(t, x_0)$ определено для любого $t \in I$ и $x_0 \in U$. При этом решение $\varphi(t, x_0)$ непрерывно по x_0.*

5.4 Теорема о гладкости

Теорема 4 *Если в условиях предыдущей теоремы $f \in C^r(\Omega)$, то $\varphi \in C^r(I \times U)$.*

Следующие две теоремы из разряда основных будут доказаны.

5.5 Неравенство Гронуолла для $n = 1$

Теорема 5 *Пусть правая часть уравнения*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

удовлетворяет условию Липшица по x с константой l :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq l|x - y|.$$

Тогда два решения $x(t)$ и $y(t)$ с начальными условиями $x(0)$ и $y(0)$ удовлетворяют неравенству

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(0) - y(0)|e^{l|t|}. \tag{3}$$

Замечание 1 *Решения удаляются друг от друга не быстрее, чем решения уравнения* $\dot{x} = lx$. .

Для доказательства используем лемму.

Лемма 2 *Пусть*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ |\dot{\varphi}(t)| \leq l|\varphi(t)|$$

Тогда

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(0)|e^{l|t|}. \tag{4}$$

Доказательство A. Пусть $t > 0$. Рассмотрим

$$\psi(t) = \varphi(t)e^{-lt}.$$

Оценим $|\psi(t)|$, а лучше $\psi^2(t)$. Имеем:

$$\frac{1}{2}(\dot{\psi^2}) = \psi \cdot \dot{\psi} = (\varphi e^{-lt})(\dot{\varphi}e^{-lt} - l\varphi e^{-lt}) \leq l\varphi^2 e^{-2lt} - l\varphi^2 e^{-2lt} = 0.$$

Итак, $\psi^2(t)$ убывает. Следовательно,

$$\psi^2(t) \leq \psi^2(0) \Rightarrow (4).$$

B. Пусть $t < 0$. Рассмотрим $\psi(t) = \varphi(-t)$. Тогда

$$|\dot{\psi}(t)| = |-\dot{\varphi}(-t)| = |\dot{\varphi}(-t)| \leq l|\varphi(-t)| = l|\psi(t)|.$$

Неравенство

$$|\psi(t)| \leq |\psi(0)|e^{lt}$$

при $t > 0$ доказано. Значит, при $t > 0$

$$|\varphi(-t)| \leq |\varphi(0)|e^{lt}$$

Неравенство (4) при $t < 0$ доказано. □

Доказательство неравенства Гронуолла.

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \ \dot{\psi}(t) = f(t, \psi(t)) \Rightarrow$$

$$|\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t)| \leq |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| \leq l|\varphi(t) - \psi(t)|.$$

По лемме получаем (3). □

5.6 Неравенство Гронуолла для произвольного n

Теорема 6 *Теорема 5 остается справедливой, если $x \in \mathbb{R}^n$.*

То же рассуждение, но в доказательстве леммы ψ^2 заменяется скалярным квадратом (ψ, ψ)

5.7 Теорема единственности

См. теорему в начале лекции.
Доказательство Если $\varphi(0) = \psi(0)$, то

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq |\varphi(0) - \psi(0)| e^{l|t|} = 0.$$

$\square$