Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания со 2 занятия.

(1) Мы выяснили, что аффинные гипербола ($uv = 1$) и окружность ($x^2+y^2 = 1$) изоморфны, а кольцо регулярных функций на гиперболе есть кольцо многочленов Лорана $\mathbf{k}[u][\frac{1}{u}]$; в частности, это кольцо факториально. В кольце же регулярных функций на окружности есть два разных по виду разложения $x^2 = (1-y)(1+y)$. Объясните, как устроено соответствующее разложение на простые множители.

(2) Один из способов доказательства неизоморфности аффинной прямой и полукубической параболы (это кривая X, заданная уравнением $x^3 = y^2$) состоит в вычислении $\mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2$, где $\mathfrak{m}_O$ это максимальный идеал начала координат в кольце регулярных функций $\mathbf{k}[X]$. Найдите размерность этого векторного пространства; мы выяснили, что для любой точки a на аффинной прямой $\dim \mathfrak{m}_a/\mathfrak{m}_a^2 = 1$.

(3) Докажите, что главные открытые множества $U_f = \{x \in X, \quad f(x) \neq 0\}$, где $f \in \mathbf{k}[X]$, составляют базу топологии Зарисского на X.

(4) Придумайте геометрические условия на регулярное отображение аффинных многообразий $f : X \to Y$, при которых гомоморфизм $f^* : \mathbf{k}[Y] \to \mathbf{k}[X]$

а) инъективен;

б) сюръективен.

(5) Продолжение задачи 6 из 1 листка. Мы уже выяснили, что а) изоморфна б) и в) изоморфна г), а также, что а) не изоморфна в), г) и з). Следующий шаг — разбить весь список кривых на приводимые и неприводимые и сравнивать внутри каждой из этих двух групп. К списку приводимых надо еще добавить кривую л) с уравнением $y^2 = y$.