

## Многомерие

- ГЛ2♦1.** Сколько  $k$ -мерных векторных подпространств в  $n$ -мерном векторном пространстве над полем из  $q$  элементов? Найдите для фиксированных  $n$  и  $k$  предел этого количества при  $q \rightarrow 1$ .
- ГЛ2♦2.** Сколько  $k$ -мерных аффинных подпространств имеется в  $n$ -мерном аффинном пространстве над конечным полем из  $q$  элементов?
- ГЛ2♦3.** Верно ли, что в каждом векторном пространстве для любых трёх векторных подпространств  $U, V, W$  выполняются соотношения:
- $(U + V) \cap (V + W) \cap (W + U) = (U + W) \cap V + (U + V) \cap W$
  - $(U + V) \cap (V + W) \cap (W + U) \subseteq (U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U)$
  - $(U + V) \cap (V + W) \cap (W + U) \supseteq (U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U)$
  - для конечномерных  $U, V, W$  разность размерностей левой и правой частей в предыдущих двух включениях чётна?
- ГЛ2♦4.** Пусть  $k$ -мерные подпространства  $W_1, \dots, W_m$  таковы, что  $\dim W_i \cap W_j = k - 1$  при всех  $i \neq j$ . Покажите, что существует либо  $(k - 1)$ -мерное подпространство  $U \subset V$ , содержащееся во всех  $W_i$ , либо  $(k + 1)$ -мерное подпространство  $W \subset V$ , содержащее все  $W_i$ .
- ГЛ2♦5.** Может ли а) векторное б) аффинное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа подпространств меньшей размерности?
- ГЛ2♦6.** В четырёхмерном аффинном пространстве над бесконечным полем задано конечное множество двумерных аффинных плоскостей. Всегда ли найдётся двумерная плоскость
- не пересекающая ни одну из них
  - пересекающая каждую из них ровно в одной точке?
- ГЛ2♦7.** Можно ли через точку, лежащую внутри<sup>1</sup> четырёхмерного куба  $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i |x_i| \leq 1\}$ , провести двумерную плоскость так, чтобы она не пересекла ни одного ребра<sup>2</sup> этого куба?
- ГЛ2♦8.** При каких  $c \in \mathbb{R}$  четырёхмерный куб из предыдущей задачи пересекается с гиперплоскостью  $\sum x_i = c$ ? Нарисуйте все трёхмерные многогранники, которые высекаются из куба такими гиперплоскостями. Если задача вызывает затруднения, потренируйтесь сначала на аналогичных сечениях трёхмерного куба<sup>3</sup> в  $\mathbb{R}^3$ .
- ГЛ2♦9.** Векторы  $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  имеют нулевую сумму, но некоторые  $n$  из них образуют в  $\mathbb{R}^n$  базис. Верно ли, что
- каждый вектор  $w \in \mathbb{R}^n$  имеет единственное представление  $w = \sum x_i v_i$ , в котором  $x_i \in \mathbb{R}$  и  $\sum x_i = 0$
  - любые  $n$  векторов  $v_i$  образуют базис в  $\mathbb{R}^n$
  - для любого вектора  $w \in \mathbb{R}^n$  найдётся составленный из векторов  $v_i$  базис, в котором все координаты вектора  $w$  неотрицательны?
- ГЛ2♦10.** Может ли поле из четырёх элементов быть подполем поля из а) восьми б\*) шестнадцати элементов?

<sup>1</sup>Т. е. имеющую координаты, по модулю строго меньшие единицы.

<sup>2</sup>Т. е. прямой, проходящей чрез какие-нибудь две соседние вершины (две точки, у которых все координаты равны  $\pm 1$ , причём эти наборы координат отличаются друг от друга ровно в одной позиции).

<sup>3</sup>Алгебраически и те и другие сечения можно описывать в барицентрических координатах относительно треугольника (соотв. тетраэдра) с вершинами в точках пересечения плоскости с тремя (соотв. четырьмя) рёбрами куба, выходящими из вершины  $(-1, -1, -1)$  (соотв.  $(-1, -1, -1, -1)$ ) или же относительно центрального симметричного ему треугольника (соотв. тетраэдра), высекаемого рёбрами, входящими в противоположную вершину.

Персональный табель \_\_\_\_\_.  
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок № 2 (8.10.2023)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
4			
5			
6а			
б			
7			
8			
9а			
б			
в			
10а			
б			