Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием. Задачи 7 и 8 (они несложные) даются на 2 недели — чтобы не перегружать недельное задание.

Задания с 3 занятия.

(1) Докажите, что функция, регулярная на аффинной плоскости с выброшенным началом координат ($\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$), регулярна на всей аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

(2) Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, $\varphi \in \mathbf{k}(X)$ — рациональная функция на X, регулярная на главном открытом множестве $U_f = \{a \in X, \text{ таких что } f(a) \neq 0\}$, где $f \in \mathbf{k}[X]$ — регулярная функция на X. Докажите, что $\varphi = \frac{g}{f^m}$, где $g \in \mathbf{k}[X]$ — некоторая регулярная функция на X, $m \geq 0$.

(3) Пусть X — приводимое аффинное алгебраическое многообразие, имеющее две неприводимые компоненты X_1 и X_2 и пусть ненулевая регулярная функция $f \in \mathbf{k}[X]$ обращается в нуль на компоненте X_2 (т.е. $X_2 \subset V(f)$). Пусть $S = \{1, f, f^2, \ldots\}$ — мультипликативно замкнутое множество, рассмотрим кольцо частных $S^{-1}\mathbf{k}[X]$ и естественное отображение $\varphi : \mathbf{k}[X] \to S^{-1}\mathbf{k}[X]$. Найдите ядро и образ этого отображения. Докажите, что кольцо $S^{-1}\mathbf{k}[X]$ изоморфно подкольцу поля $\mathbf{k}(X_1)$ рациональных функций на компоненте X_1, состоящему из рациональных функций вида $\frac{g}{f_1^m}$, $g \in \mathbf{k}[X_1]$, $m \geq 0$ а $f_1 \in \mathbf{k}[X_1]$ это ограничение функции f на компоненту X_1.

(4) Докажите, что любой регулярный автоморфизм аффинной прямой $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ является аффинным преобразованием, т.е. $f(t) = at+b$, $a, b \in \mathbf{k}$, $a \neq 0$.

(5) Докажите, что любой бирациоальный автоморфизм аффинной прямой $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ является дробно-линейным преобразованием, т.е. $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$, $a, b, c, d \in \mathbf{k}$, $ad - bc \neq 0$.

(6) Выясните, какие из неприводимых кривых задачи 5 из первого задания бирационально изоморфны, а какие нет.

(7) Докажите, что кольцо A (коммутативное, ассоциативное и с единицей) изоморфно прямому произведению двух колец ($A \cong B \times C$) тогда и только тогда, когда в A есть идемпотентный элемент (т.е. такой $e \in A$, что $e^2 = e$, но $e \neq 0, 1$).

(8) Аффинная квадрика Q задается в $\mathbb{A}^3$ уравнением $z = x^2 - y^2$. Докажите, что проектирование p квадрики Q из начала координат на плоскость Π, заданную уравнением $x = 1$, является бирациональным изоморфизмом, напишите явные формулы, задающие рациональное отображение p и обратное рациональное отображение q. На каких открытых множествах регулярны отображения p и q? На каких открытых множествах p и q являются взаимно обратными регулярными отображениями?