Задачи 3. 12.10.2023

1. В непривитом господине N. поселился коронавирус. Каждую миллисекунду с вероятностью 0,2 у коронавируса случается помутнение сознания, при котором он решает, что он — бактерия, и в этом случае он немедленно делится на два таких же (независимых) коронавируса. С вероятностью же 0,7 помутнения не происходит и он продолжает жить своей тихой одинокой жизнью, но с вероятностью 0,1 он не выдерживает непотребного поведения господина N. и умирает.

   (1) Вычислите вероятность, что рано или поздно господин N. вылечится от коронавируса.

   (2) Вычислите мат. ожидание и дисперсию числа коронавирусов при времени равном n миллисекунд.

   (3) Сделайте предыдущие пункты задачи в предположении, что в начальный момент времени в господине N. живет $m \in \mathbb{N}$ (независимых) коронавирусов.

   Подсказка: Как вероятность вымирания связана с производящими функциями?

2. Кандидату в депутаты районного совета села Марковка Коле не хватает денег на избирательную кампанию. Объявив сбор среди односельчан, Коля собрал 300 рублей, а для постановки агитационного куба ему нужно 800 рублей. Местный богач - владелец пивного ларька Ермил - согласился сыграть с Колей в игру по таким правилам. Если Коля ставит A рублей, Коля выиграет A рублей с вероятность 0.4 и проиграет A рублей с вероятностью 0.6.

   Нарисуйте соответствующее этому процессу случайное блуждание. Найдите вероятность того, что Коля сможет поставить свой куб до того, как растратит все собранные с односельчан деньги, если

   1) он ставит каждый раз ровно 100 рублей (так советует Колина мама)

   2) он ставит каждый раз наибольшую возможную для себя сумму (такую, чтобы в случае выигрыша он собрал не больше нужных 800 рублей) - так рекомендует делать Колин папа.

   Чья стратегия даст Коле больше шансов накопить денег и поставить куб?

   Подсказка: Рассмотрите вероятности $\phi(x)$ того, что Коля наберет 800 рублей прежде, чем потеряет все деньги, при условии, что в начале у него есть x рублей, для различных x. Как они между собой связаны?

3. Пусть последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \dots$ образует (вообще говоря, не однородную) марковскую цепь с начальным распределением $p^{(0)}$. Рассмотрим семейство марковских цепей $\xi_0^j, \xi_1^j, \dots$ с теми же матрицами переходных вероятностей, но с другими начальными распределениями, которые я обозначу $p^{(0),j}$, имеющими вид $p_i^{(0),j} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} обозначает символ Кронекера. Другими словами, цепь (ξ_n^j) имеет те же переходные вероятности, что и цепь (ξ_n), но другие, детерминистские начальные условия: она стартует из состояния j. Докажите, что

$$p^{(n)} = \sum_{j \geq 1} p_j^{(0)} p^{(n),j},$$

где $p^{(n)}$ и $p^{(n),j}$ обозначают распределения в момент времени n цепей (ξ_n) и (ξ_n^j), соответственно.

Формулу выше можно воспринимать как "разложение цепи (ξ_n) по базису". Она намекает, что во многих случаях достаточно исследовать цепи (ξ_n^j), имеющие детерминистские начальные условия.