Линейные отображения и матрицы

ГС5◇1. Матрица A состоит из трёх столбцов a_1, a_2, a_3. На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A, чтобы получилась матрица **а)** из трёх столбцов a_3, 0, a_1 **б)** из пяти столбцов a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_1, $a_1+a_2+a_3$, $-3a_2+2a_3$.

ГС5◇2. Матрица A состоит из четырёх строк a_1, a_2, a_3, a_4 (строки выписаны сверху вниз). На какую матрицу и с какой стороны надлежит умножить матрицу A, чтобы получилась матрица **а)** из двух строк $a_1+2a_2+3a_3$, $a_4-2a_3+3a_2$ **б)** из трёх строк a_4, a_3-a_2, a_1.

Обозначения. Пусть набор векторов $\boldsymbol{e}=(e_1,\dots,e_m)$ образует базис векторного пространства U, а набор векторов $\boldsymbol{f}=(f_1,\dots,f_k)$ — базис векторного пространства W. Матрица $F_{\boldsymbol{fe}}$ линейного отображения $F: U\to W$ в этих двух базисах определяется равенством $F(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{f}\,F_{\boldsymbol{fe}}$, где $F(\boldsymbol{e})\overset{\text{def}}{=}(F(e_1),\dots,F(e_m))$ — матрица-строка, составленная из векторов $F(e_j)$. Матрица $F_{\boldsymbol{fe}}$ имеет размер $k\times m$, и в её j-м столбце стоят коэффициенты линейного выражения вектора $F(e_j)$ через базис $\boldsymbol{f}$. Вектор $v=\sum e_i x_i=\boldsymbol{e}x$ переводится отображением F в вектор $F(v)=\boldsymbol{f}y$ со столбцом координат $y=F_{\boldsymbol{fe}}x$. Если наборов векторов $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_m)$ лежит в линейной оболочке $\mathrm{Span}(\boldsymbol{w})$ набора векторов $\boldsymbol{w}=(w_1,\dots,w_k)$, то *матрица перехода* $C_{\boldsymbol{wu}}$ от векторов $\boldsymbol{u}$ к векторам $\boldsymbol{w}$ имеет размер $k\times m$ и определяется равенством $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}\,C_{\boldsymbol{wu}}$. В её j-м столбце стоят коэффициенты линейного выражения вектора u_j через векторы $\boldsymbol{w}$. Каждый вектор $v=\sum u_i x_i=\boldsymbol{u}x\in\mathrm{Span}(\boldsymbol{u})$ выражается через векторы $\boldsymbol{w}$ как $v=\boldsymbol{w}y$, где столбец $y=C_{\boldsymbol{wu}}x$.

ГС5◇3. Рассмотрим разностный оператор $\nabla: f(x)\mapsto f(x)-f(x-1)$ на пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant 3}$ многочленов степени $\leqslant 3$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Напишите его матрицу в стандартном базисе x^i, где $0\leqslant i\leqslant 3$ и $x^0\overset{\text{def}}{=}1$, а также в базисе $\binom{x+k}{k}=(x+1)\cdots(x+k)/k!$, где $0\leqslant k\leqslant 3$ и $\binom{x}{0}=1$. Напишите матрицы переходов между этими базисами. Найдите $\ker\nabla$ и $\operatorname{im}\nabla$.

ГС5◇4. Рассмотрим оператор умножения на $x: f\mapsto xf$ в кольце вычетов $\mathbb{Q}[x]/\big((x-2)^4\big)$. Напишите его матрицу в базисе x^i, $0\leqslant i\leqslant 3$, и в базисе $(x-2)^i$, $0\leqslant i\leqslant 3$, а также матрицы переходов между этими базисами. Найдите $\ker x$ и $\operatorname{im} x$.

ГС5◇5. Пусть $\dim U=n$, $\dim W=m$, а подпространства $U_0\subseteq U$ и $W_0\subseteq W$ имеют $\dim U_0=n_0$ и $\dim W_0=m_0$. Покажите, что линейные отображения $F: U\to W$ с $\ker F\supseteq U_0$ и $\operatorname{im} F\subseteq W_0$ образуют векторное подпространство в $\mathrm{Hom}(U,W)$, и найдите его размерность.

ГС5◇6. Покажите, что следующие свойства матрицы эквивалентны: **а)** все столбцы пропорциональны **б)** все строки пропорциональны **в)** матрица является произведением столбца и строки, и если квадратная матрица A имеет эти свойства, то она пропорциональна A^2.

ГС5◇7. Опишите *центр* $\{C\in\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)\mid \forall X\in\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)\ CX=XC\}$ алгебры $n\times n$ матриц.

ГС5◇8. Пусть квадратная матрица A такова, что $A^m=0$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$. Обязательно ли матрица $E+A$ обратима?

ГС5◇9. Обозначим через E_{ij} квадратную матрицу размера $n\times n$ с единицей в клетке (i,j) и нулями в остальных клетках. Составьте таблицу умножения матриц E_{ij}.

ГС5◇10. Вычислите **а)** $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^n$ **б)** $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$ **в)** $\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}^{-1}$ **г)** $\begin{pmatrix}a&1&1\\0&a&1\\0&0&a\end{pmatrix}^{-1}$ **д)** $\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{2021}$.

ГС5◇11. При каких $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ матрица $\begin{pmatrix}a&b&c&d\\0&a&b&c\\0&0&a&b\\0&0&0&a\end{pmatrix}$ обратима? Явно вычислите обратную матрицу, когда она существует.

ГС5◇12. Подсчитайте количество 3×3 матриц ранга 2 над полем из q элементов.

ГС5◇13. Для *коммутатора* $[A,B]\overset{\text{def}}{=}AB-BA$ квадратных матриц $A,B\in\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ докажите *правила Лейбница*: **а)** $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$ **б)** $[A,[B,C]]=[[A,B],C]+[B,[A,C]]$.

ГС5◇14. Сумма $\operatorname{tr}A\overset{\text{def}}{=}\sum a_{ii}$ называется *следом* квадратной матрицы A. Покажите, что **а)** $\operatorname{tr}[A,B]=0\ \forall A,B\in\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ **б)** $\operatorname{tr}(CAC^{-1})=\operatorname{tr}(A)\ \forall A\in\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ и $\forall C\in\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.