Программа коллоквиума по материалам первой четверти

1. Определение векторного пространства. Единственность нулевого вектора. Противоположный вектор $-v$ однозначно определяется по v. Соотношения $(-1) \cdot v = -v$, $0 \cdot v = 0$, $\lambda \cdot 0 = 0$. Примеры векторных пространств.

2. Определение линейного отображения $f : V \to W$, равенства $f(0) = 0$ и $f(-v) = -f(v)$. Композиция линейных отображений линейна.

3. Определитель 2×2 и правила Крамера для разложения вектора по базису в двумерном векторном пространстве $\Bbbk^2$ и для решения систем из двух линейных уравнений на две неизвестных.

4. Площадь ориентированного параллелограмма в двумерном векторном пространстве: её определение, свойства, существование и единственность с точностью до пропорциональности.

5. Определение аффинного пространства, ассоциированного с данным векторным пространством. Равенства $\overrightarrow{pp} = 0$ и $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$. Равносильность равенств $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ и $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$. Векторизация и аффинизация. Примеры аффинных пространств.

6. Существование и единственность барицентра набора взвешенных точек. Теорема о группировании масс.

7. Барицентрические комбинации точек, независимость барицентрической комбинации от выбора начальной точки, барицентрическая комбинация барицентрических комбинаций является барицентрической комбинацией.

8. Определение евклидова пространства и длины вектора. Теорема Пифагора. Ортогональная проекция и нормальная составляющая произвольного вектора по отношению к ненулевому вектору. Существование ортонормального базиса на евклидовой плоскости.

9. Неравенства Коши – Буняковского – Шварца и треугольника.

10. Равенство $\det^2(u, w) = \det \begin{pmatrix} (u,u) & (u,w) \\ (w,u) & (w,w) \end{pmatrix}$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Положительно и отрицательно ориентированные базисы в $\mathbb{R}^2$. Ориентированный угол $\measuredangle(u, w)$ между векторами u, w.

11. Скалярное произведение однозначно восстанавливается по функции длины. Движения и подобия аффинного евклидова пространства являются аффинными преобразованиями и сохраняют абсолютную величину углов.

12. Определение прямой. Геометрические свойства уравнения прямой на аффинной плоскости над любым полем. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

13. Геометрические свойства уравнения прямой на евклидовой плоскости. Уравнение прямой перпендикулярной вектору и проходящей через точку. Расстояние от точки до прямой в $\mathbb{R}^2$.

14. Уравнение срединного перпендикуляра к отрезку и уравнения биссектрис углов между двумя заданными прямыми в $\mathbb{R}^2$.

15. Аффинные отображения. Независимость дифференциала от выбора начальной точки.

16. Отображение аффинно если и только если оно перестановочно со взятием барицентрических комбинаций.

17. Композиция аффинных отображений аффинна. При любом выборе точки p в аффинном пространстве каждое аффинное преобразование однозначно раскладывается в композицию сдвига и аффинного преобразования, оставляющего точку p на месте. Правило коммутирования аффинного отображения со сдвигом: $F \circ \tau_v = \tau_{D_F(v)} \circ F$.

18. Определения порождающего набора векторов, линейной зависимости и базиса в произвольном векторном пространстве. Набор линейно зависим если и только если один из векторов линейно выражается через другие. Порождающий набор является базисом тогда и только тогда, когда он линейно независим.

19. Каждый минимальный по включению порождающий набор является базисом. Каждый максимальный по включению линейно независимый набор является базисом.

20. Лемма о замене. В конечно порождённом векторном пространстве любой линейно независимый набор включается в базис, любой порождающий набор содержит базис, и все базисы имеют одинаковую мощность. Размерность векторного пространства.

21. В n-мерном векторном пространстве каждый линейно независимый набор из n векторов, и каждый порождающий набор из n векторов являются базисами.

22. Базисы n-мерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ находятся в биекции с линейными изоморфизмами $\Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$, координаты вектора относительно базиса.

23. В конечномерном векторном пространстве V каждое подпространство $U \subset V$ тоже конечномерно и $\dim U \leqslant \dim V$.

24. Пресечения векторных подпространств, линейная оболочка множества векторов, сумма векторных подпространств, равенство $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$., Трансверсальные подпространства.

25. Матрица линейного отображения. Матрица композиции линейных отображений.

26. Произведение матриц, ассоциативность и дистрибутивность умножения матриц, равенство $(AB)^t = B^t A^t$.

27. Матрица перехода $C_{\boldsymbol{uw}}$, выражающая набор векторов $\boldsymbol{w} = (w_1, \dots, w_m)$ через набор векторов $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_n)$, равенство $C_{\boldsymbol{uw}} = C_{\boldsymbol{uv}} C_{\boldsymbol{vw}}$.

28. Матрицы линейного отображения в разных базисах.

29. Размерность пространства линейных отображений.

30. Определитель матрицы линейного опертора двумерного векторного пространства, независимость от базиса. Определитель произведения матриц 2×2.