Образцы задач, которые могут встретиться на коллоквиуме

Задача 1. Верно ли, что любые три различные параллельные прямые на аффинной плоскости можно перевести аффинным преобразованием в любые три другие различные параллельные прямые? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

Задача 2. Нетождественное аффинное преобразование коммутирует со всеми сдвигами. Верно ли, что тогда и само оно — сдвиг?

Задача 3. Верно ли, что биективное аффинное преобразование, дифференциал которого не имеет ненулевых неподвижных векторов[1], обязательно имеет неподвижную точку?

Задача 4. Пусть аффинное преобразование $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таково, что $\varphi^m = \mathrm{Id}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Докажите, что φ имеет неподвижную точку.

Задача 5* (более трудный вариант предыдущей задачи[2]). Верно ли, что любая конечная группа аффинных преобразований аффинного пространства над полем, характеристика которого не делит количество элементов в группе, имеет неподвижную точку?

Задача 6. Напишите направляющие векторы биссектрис углов, возникающих при пересечении прямых $2x - y = 5$ и $3y + x = 2$ на евклидовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 7. Напишите уравнение прямой, симметричной прямой $2x - y = 5$ относительно прямой $3y + x = 2$ на евклидовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

Задача 8. Выразите через длины сторон $\triangle abc$ барицентрические координаты относительно вершин $\triangle abc$ центра вписанной в $\triangle abc$ окружности, а радиус этой окружности — через площадь треугольника и длины его сторон. Те же вопросы можно задать про центр и радиус описанной окружности, хотя это *чуть* более трудоёмко.

Задача 9. Покажите, что множество 2^M всех подмножеств данного множества M образует векторное пространство над полем $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/(2) = \{0, 1\}$ относительно операций

$$X + Y \overset{\text{def}}{=} (X \cup Y) \smallsetminus (X \cap Y), \quad 1 \cdot X \overset{\text{def}}{=} X \quad \text{и} \quad 0 \cdot X \overset{\text{def}}{=} \varnothing .$$

В предположении, что множество M конечно, постройте в пространстве 2^M какой-нибудь базис и найдите $\dim 2^M$. Пусть подмножества $X_1, \dots, X_n \subset M$ таковы, что $X_i \not\subset \bigcup_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1, \dots, n$. Могут они быть линейно зависимы?

Задача 10. Во время своего нашумевшего тура по Зазеркалью Алиса совершила экскурсию по трёхмерной поверхности четырёхмерного куба[3], в ходе которой покидала каждую комнату через лаз **а)** в левой **б)** в противоположной стене к той, через которую проникла в эту комнату. В скольких комнатах она в итоге побывала?

Задача 11. Обозначим через A, B, C, D, E концы стандартных базисных векторов в $\mathbb{R}^5$, а через X — середину отрезка, соединяющего центры треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$. Проходящая через X прямая YZ имеет точку Y на прямой AE, а точку Z — в плоскости BCD. Найдите $\overrightarrow{XY} : \overrightarrow{YZ}$.

Задача 12. В векторном пространстве $\mathbb{Q}^4$ задан конечный набор двумерных векторных подпространств. Всегда ли найдётся двумерное подпространство, трансверсальное[4] ко всем подпространствам из заданного набора?

[1] Т. е. таких $v \neq 0$, что $D_F(v) = v$.

[2] На коллоквиуме его не будет.

[3] Выглядевшей как нагромождение обычных трёхмерных кубических комнат, причём в каждой из шести стен каждой комнаты был лаз в соседнюю комнату.

[4] Векторные подпространства U и W в векторном пространстве V размерности $\dim V = n$ называются *трансверсальными*, если $\dim(U \cap W) = \max(0, \dim U + \dim W - n)$. Иначе говоря, при $\dim U + \dim W \leqslant n$ трансверсальность означает, что $U \cap W = 0$, а при $\dim U + \dim W \geqslant n$ — что $U + W = V$.

Задача 13. Сколько прямых в n-мерном аффинном пространстве над полем из q элементов? А сколько (невырожденных) треугольников на плоскости? А сколько плоскостей в m-мерном аффинном пространстве?

Задача 14. Над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов подсчитайте количество 3×3 матриц, столбцы которых порождают двумерное векторное подпространство в трёхмерном координатном пространстве $\mathbb{F}_q^3$.

Задача 15. Рассмотрим n-мерное координатное векторное пространство $\mathbb{F}_2^n$ над полем $\mathbb{F}_2$. Верно ли, что в любом его векторном подпространстве либо у каждого вектора, либо ровно у половины из векторов сумма координат нулевая?

Задача 16. Может ли поле из 16 элементов содержать подполе из 8 элементов?

Задача 17. Может ли двумерное векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа прямых? Другие варианты этой же задачи: может ли векторное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа векторных подпространств коразмерности[5] 1? А конечного числа подпространств произвольных положительных коразмерностей?

Задача 18. Верно ли, что в трёхмерном векторном пространстве для любых пяти векторов $v_1, \dots, v_5$ всегда можно подобрать такие пять чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_5$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^5 \lambda_i = 0$ и $\sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i = 0$?

Задача 19. Векторное подпространство $V \subset \Bbbk[x]$ содержит многочлены каждой из степеней от нуля до m. Верно ли, что оно содержит все многочлены степени $\leqslant m$?

Задача 20. Поле $\mathbb{F}$ конечномерно как векторное пространство над своим подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$. Докажите, что каждый элемент поля $\mathbb{F}$ является корнем какого-нибудь многочлена из $\Bbbk[x]$.

Задача 21. Дано $m+1$ попарно разных чисел $a_0, a_1, \dots, a_m \in \Bbbk$. Постройте в пространстве многочленов степени $\leqslant m$ и коэффициентами из поля $\Bbbk$ такой базис, в котором координатами многочлена f являются **а)** значения f в точках a_i **б)** значения f и его первых m производных в точке a_0. Много ли существует таких базисов?

Задача 22*. Покажите, что в счётномерном[6] пространстве всякое подпространство конечномерно или счётномерно, а всякое несчётное множество векторов линейно зависимо.

Задача 23*. Обладает ли пространство формальных степенных рядов $\Bbbk[\![x]\!]$ счётным базисом над полем $\Bbbk$? Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Задача 24. Квадратная вещественная матрица называется *бистохастической*, если сумма элементов в каждой её строке и каждом её столбце равна единице. Верно ли, что произведение бистохастических матриц всегда является бистохастической матрицей?

Задача 25. Пусть все строки квадратной матрицы A пропорциональны друг другу. Покажите, что матрица A^2 пропорциональна A.

---

[5] Коразмерностью векторного подпространства U в векторном пространстве V называется разность размерностей $\dim V - \dim U$.

[6] Т. е. в пространстве со счётным базисом. Напомню, что *базисом* векторного пространства V называется такое множество векторов $E \subset V$, что любой вектор из V единственным образом представляется в виде конечной линейной комбинации векторов из E. Типичный пример счётномерного пространства — пространство многочленов $\Bbbk[x]$, базис в котором образуют мономы x^i, $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.