**Семинар 3.**

В этом и последующих заданиях всюду через $\mathbf{k}$ обозначается основное поле. Поле $\mathbf{k}$ может быть числовым полем, например, $\mathbf{k} = \mathbb{C},\ \mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$, либо нечисловым, например, $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$. Элементы основного поля будем называть *скалярами.* Если в задаче не оговаривается, над каким основным полем мы работаем, то, значит, задача сформулирована для произвольного основного поля $\mathbf{k}$.

**Задача 1.** Пусть характеристика основного поля $\mathbf{k}$ не равна 2 (это обозначается так: $\mathrm{char}\mathbf{k} \neq 2$). Даны 4 различные точки $A,\ B,\ C,\ D$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$, имеющие аффинные координаты соответственно $a,\ b,\ c,\ d$ в некоторой аффинной карте. Выражение $\left(\frac{a-c}{a-d}\right)/\left(\frac{b-c}{b-d}\right)$ называется *двойным отношением* точек $A,\ B,\ C,\ D$.
1) Какие значения НЕ может принимать двойное отношение $\lambda = (A_1A_2A_3A_4)$ четырех точек $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ на проективной прямой?
Пусть $\mathrm{char}\mathbf{k} = 0$.
2) Рассмотрим группу перестановок $S_4$ чисел 1, 2, 3, 4. Для $\sigma \in S_4$ и $\lambda = (A_1A_2A_3A_4)$ обозначим $\sigma(\lambda) = (A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)}A_{\sigma(3)}A_{\sigma(4)})$. Сколько значений может принимать $\sigma(\lambda)$, когда $\sigma$ пробегает все 24 перестановки из группы $S_4$? Перечислите эти значения.
3) Сколько имеется таких перестановок $\sigma \in S_4$, что $\sigma(\lambda) = \lambda$? Перечислите эти перестановки.

**Задача 2.** Дана проективная прямая $l$, и дано проективное преобразование $f : l \xrightarrow{\sim} l$, задаваемое в аффинной карте на $l$ с аффинной координатой $x$ как дробно-линейное преобразование $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$. Преобразование $f$ называется *инволюцией*, если $f$ не является тождественным преобразованием, а его квадрат $f^2 := f \circ f$ является тождественным преобразованием.
1) Какие условия надо наложить на коэффициенты $a,\ b,\ c,\ d$, чтобы $f$ было инволюцией?
2) Пусть проективное преобразование $f$ проективной прямой таково, что для некоторой точки $a$ выполнены условия $f(a) \neq a$ и $f^2(a) = a$. (В этом случае пара точек $(a, f(a))$ называется *инволютивной парой.*) Докажите, что $f$ - инволюция. (Другими словами, всякое проективное преобразование прямой, имеющее хотя бы одну инволютивную пару, является инволюцией.)

**Задача 3.** На евклидовой плоскости с координатами $(x, y)$ дана окружность $\omega$ радиуса 1 с центром в начале координат $(0, 0)$. Верхняя точка $N = (0, 1)$ окружности $\omega$ называется ее *северным полюсом.* Обозначим этот северный полюс через $N$. Рассмотрим ось абсцисс $l = OX$ и возьмем проективную прямую $\mathbb{P}^1$, получаемую из прямой $l$ добавлением бесконечно удаленной точки. Отображение $p : \omega \setminus \{N\} \to l,\ Y \mapsto NY \cap l$ называется *стереографической проекцией* окружности $\omega$ на прямую $l$ из центра (северного полюса) $N$, а отображение $\varphi :\ \omega \to \omega,\ Y \mapsto Z$, где $YZ$ - диаметр окружности $\omega$, называется *антиподальным отображением* окружности $\omega$ в себя.

Рассмотрим отображение $f :\ l \setminus \{O\} \to l$, представляющее собой композицию отображений $f = p \circ \varphi \circ p^{-1}$. Докажите, что $f$ продолжается до инволюции $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ на проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и найдите формулу этой инволюции как дробно-линейного преобразования (в координате $x$ на $l$).

**Задача 4.** Сколько неподвижных точек может иметь произвольное нетождественное проективное преобразование $f$ проективной прямой $\mathbb{P}^1$:
а) над произвольным основным полем $\mathbf{k}$,
б) над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$?
в) Ответьте на вопросы а) и б), когда $f$ - инволюция.

**Задача 5.** Даны две различные проективные прямые $l$ и $m$ в проективной плоскости, пересекающиеся в точке $S$, и дано проективное отображение $f : l \xrightarrow{\sim} m$ такое, что $f(S) \neq S$. В композицию какого минимального числа перспектив можно разложить отображение $f$?