Семинар 5.

Задача 1. Коника $\mathcal{C}$ по Штейнеру строится по проективному соответствию $f: \ \check{A} \to \check{B}$ между пучками прямых с центрами в точках A и B на конике $\mathcal{C}$ такому, что $f(AB) \neq AB$. Как изменится коника $\mathcal{C}$, если потребовать, чтобы $f(AB) = AB$?

Задача 2. Докажите, что если A_1 и B_1 - две различные фиксированные точки на конике $\mathcal{C}$, построенной по Штейнеру посредством проективного соответствия $f: \check{A} \to \check{B}$ между двумя пучками прямых с центрами A и B на $\mathcal{C}$, отличными от A_1 и B_1, то отображение $f: \ \check{A}_1 \to \check{B}_1: \ A_1X \mapsto B_1X, \quad X \in \mathcal{C}$, является проективным.
Указание: Один из способов решения этой задачи связан с использованием теоремы Паскаля, которая гласит следующее. *Пусть на конике по Штейнеру* $\mathcal{C}$ *даны 6 различных точек* $A, \ B, \ C, \ A_1, \ B_1, \ C_1$. *Тогда три точки* $M = AB_1 \cap A_1B, \ N = AC_1 \cap A_1C$ *и* $P = BC_1 \cap B_1C$ *коллинеарны.* Теорему Паскаля мы разберем более подробно на следующем занятии семинара. Любые другие варианты решения данной задачи также очень желательны и будут рассмотрены на семинаре.

Задача 3. Пусть для простоты основное поле $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто. Пользуясь конструкцией Штейнера, докажите, что произвольная прямая на плоскости пересекает конику по Штейнеру $\mathcal{C}$ не более, чем в двух точках.

Задача 4. Пользуясь произволом в выборе проективных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ на плоскости P^2, а также в выборе проективного соответствия между пучками прямых, посредством которых построена коника по Штейнеру $\mathcal{C}$, найдите уравнение коники $\mathcal{C}$.