Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания с 4 занятия.

(1) (В связи с задачей 1 прошлого задания) Покажите, что ненулевой многочлен $P(x,y) \in \mathbf{k}[x,y]$ обращается в нуль в бесконечном множестве точек.

(2) Покажите, что локальное кольцо начала координат на кривой д) из 5-й задачи первого задания (приводимая кривая, заданная уравнением $xy = 0$), состоит из выражений вида $a + x\varphi(x) + y\psi(y)$, где φ и ψ это рациональные функции от одной переменной, знаменатели которых не обращаются в нуль в нуле.

(3) Существуют ли в проективной пространстве $\mathbb{P}^n$ открытые аффинные подмножества, не содержащиеся ни в одном открытом аффинном подмножестве $U_L = \{x \in \mathbb{P}^n, \quad L(x) \neq 0\}$ где L — какая-нибудь линейная форма.

(4) На занятии мы написали явно в однородных координатах формулы параметризации окружности, т.е. отображение $F : \mathbb{P}^1 \to X$, где X это кривая в $\mathbb{P}^2$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$, заданная однородным уравнением $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$. Координаты в $\mathbb{P}^1$ мы обозначили $(y_0 : y_1)$, тогда у нас получилось $F = (y_1^2 + y_0^2 : y_1^2 - y_0^2 : 2y_0y_1)$. Для доказательства того, что F является изоморфизмом, мы предложили формулы для обратного отображения $G : X \to \mathbb{P}^1$, а именно $G = (x_2 : x_0 + x_1)$ и проверили, что они являются взаимно обратными. Неприятность, однако, состоит в том, что отображение G (заданное, вообще говоря, как отображение из $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^1$), не определено в точке $(1 : -1 : 0) \in X$. Для завершения доказательства изоморфности придумайте другое отображение $\widetilde{G}$ из $\mathbb{P}^2$ в $\mathbb{P}^1$, регулярное в точке $(1 : -1 : 0)$, такое что ограничения $\widetilde{G}$ и G на X совпадают всюду, где они оба регулярны.

Кроме того, остались неразобранными задачи 4-8 из прошлого задания, причем задачу 8 теперь предлагается рассмотреть и в проективном варианте, считая, что квадрика Q задана в $\mathbb{P}^3$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ уравнением $x_0x_3 = x_1^2 - x_2^2$, а проектирование производится из точки $(1 : 0 : 0 : 0) \in Q$ на проективную плоскость, заданную уравнением $x_0 = x_1$. (Аффинная версия задачи из прошлого задания получается ограничением на аффинную карту $x_0 \neq 0$ — проверьте это!.)