

**Домашнее задание 2**  
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I**  
**Срок сдачи: 27 октября**

*Минимум из количества данных задач и 10 равняется оценке за листок.*

1. (а) Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  такова, что подпоследовательности  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  сходятся. Обязательно ли сходится сама последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?
- (б) Последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  такова, что сходятся подпоследовательности  $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(x_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Обязательно ли сходится последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ?
2. Пусть даны две ограниченные последовательности  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Докажите неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Приведите примеры, когда имеют место строгие неравенства.

3. Пусть  $y_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Докажите, что  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + A$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + A$

4. К чему и при каких  $\alpha \in \mathbb{R}$  сходится последовательность заданная как  $x_n = \frac{n2^n + \alpha^n}{(n+1)2^n + (2n+3)\alpha^n}$ ?

- 5\*. Докажите, что у последовательности  $(n \sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  есть ограниченная подпоследовательность.

6. Найти  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  и  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$  последовательности с  $n$ -м членом  $(-1)^n (1 + \frac{1}{n})^{2n} + n2^{-n}$ .

7. Пусть последовательность  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  задана соотношением  $x_{n+1} = ax_n + b$  (числа  $a \neq 1, b, x_0$  считаем известными). Найдите явную формулу для  $x_n$  и определите, при каких  $a, b, x_0$  последовательность сходится.

8. Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Обязательно ли сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ ?

9. Сходятся ли ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^{\ln n}, \quad q \in (0, 1)?$$

- 10\*\*. Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1}$ , где  $p_n$  —  $n$ -е простое число?

11. Покажите, что ряд сходится и найдите его сумму

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

12. Сходятся ли ряды

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + \sin n}{n^2 - n + 1}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

*Звёздочкой помечены задачи повышенной сложности.*