11 Лекция 11. Экспонента линейного оператора

11.1 Одна короткая формула

Линейные системы на плоскости имеют разнообразнейшие фазовые портреты, см. рис. 5.1 в учебнике. Тем удивительнее, что все они покрываются одной формулой:

$$n = 1,\ \dot{x} = ax,\ x(t) = e^{at}x(0);$$

n произвольно,

$$\dot{x} = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x(t) = e^{At}x(0).$$

11.2 Определение и основное свойство экспоненты

Определение 1 *Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - линейный оператор. Тогда*

$$e^A = E + A + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

Здесь $0! = 1! = 1$.

Теорема 1 *ФМР системы*

$$\dot{x} = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

имеет вид $X(t) = e^{At}$.

Доказательство Проверим равенство

$$\dot{X} = AX.$$

Имеем:

$$\dot{X}(t) = \left(E + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots\right)^{\cdot} = A + \dots + \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} + \dots = AX(t).$$

Законность почленного дифференцирования доказана ниже. □

11.3 Существование экспоненты

Определение 2

$$||A|| = LipA = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} \tag{2}$$

Предложение 1 $||A||$ *существует.*

Доказательство $||A|| = \sup_{|x|=1}|Ax| = \max_{|x|=1}|Ax|$. Сфера $|x| = 1$ компактна, функция $|Ax|$ непрерывна. Непрерывная функция на компакте достигает максимума. $\square$

Предложение 2 *Пространство линейных операторов с определенной выше нормой полно.*

Доказательство Известно, что все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны. Рассмотрим норму $||A||' = \sqrt{\Sigma a_{ij}^2}$, где (a_{ij}) - матрица оператора A. Пространство операторов с такой нормой - евклидово размерности n^2. Это пространство полно. Значит и пространство операторов с нормой (2) полно. $\square$

Предложение 3 $||AB|| \leq ||A||||B||$.

Доказательство $||AB|| = \max_{|x|=1}|ABx| \leq ||A||_{\max|x|=1}|Bx| \leq ||A||||B||$ $\square$

Теорема 2 *Экспонента любого линейного оператора существует.*

Доказательство Последовательность частных сумм $\Sigma_N = \Sigma_0^N \frac{A^k}{k!}$ фундаментальна. Действительно, пусть $N < M$, $||A|| = a$. Тогда

$$||\Sigma_M - \Sigma_N|| = ||\frac{A^{N+1}}{N!} + \dots + \frac{A^M}{M!}|| \leq \frac{a^N}{(N+1)!} + \dots + \frac{a^M}{M!} < \varepsilon,$$

при достаточно большихM и N, поскольку ряд $\Sigma_0^\infty \frac{a^k}{k!}$ сходится. $\square$

Замечание 1 *Ряд* $\Sigma \frac{A^k t^k}{k!}$ *сходится равномерно на каждом отрезке, и*

$$(e^{At})^{\cdot} = A(E + A + \dots + \frac{A^k}{t^k} + \dots).$$

Поэтому ряд для e^{At} *можно почленно дифференцировать.*

11.4 Вычисление экспоненты в случае вещественного собственного базиса

Теорема 3 *Пусть* $\xi^1, \dots, \xi^n$ *- собственный базис оператора* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *Тогда ФСР уравнения* (1) *имеет вид:*

$$e^{\lambda_1 t}\xi^1, \dots, e^{\lambda_n t}\xi^n. \tag{3}$$

Доказательство Если $A\xi = \lambda\xi$, то

$$(e^{\lambda t\xi})^{\cdot} = \lambda e^{\lambda t}\xi = e^{\lambda t}A\xi = A(e^{\lambda t}\xi).$$

Линейная независимость решений (3) проверяется при $t = 0$. □

Практическое вычисление.

Шаг 1. Найти λ_j, ξ^j.

Шаг 2. Для каждого j найти разложение базисного вектора e_j по собственным векторам ξ^k:

$$e_j = \Sigma c_{kj}\xi^j.$$

Шаг 3. j-й столбец матрицы e^{At} имеет вид:

$$e^{At}e_j = e^{At}(\Sigma c_{kj}\xi^j) = \Sigma c_{kj}e^{\lambda_j t}\xi^j.$$

11.5 Комплексификация

Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет комплексный собственный базис

$$\xi^1, \dots, \xi^n \in \mathbb{C}^n. \tag{4}$$

Обман A задан только на $\mathbb{R}^n$, а не на $\mathbb{C}^n$. Собственный базис (4) имеет не A, а другой оператор ${}^{\mathbb{C}}A$, действующий на пространстве $\mathbb{C}^n =^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^n$. Это пространство и оперетор ${}^{\mathbb{C}}A$ (комплексификация оператора A) определяется так:

$$^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n = \{\xi + i\eta | \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^n\},$$

умноженные на комплексные числа - по распределительному закону;

$$^{\mathbb{C}}A : \xi + i\eta \mapsto A\xi + iA\eta.$$

Базис $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ над $\mathbb{R}$ - попрежнему базис пространства $\mathbb{C}^n =^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^n$ над $\mathbb{C}$. Матрица операторов A и ${}^{\mathbb{C}}A$ в этом базисе одна и та же.

11.6 Случай комплексного собственного базиса

Пусть $\xi^{1\text{'}}, \dots, \xi^n$ - собственный базис оператора ${}^{\mathbb{C}}A$ с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Тогда $e^{{}^{\mathbb{C}}A}$ вычисляется тем же способом, что и e^A.

11.7 Другое определение экспоненты

Определение 3

$$e^A = \lim_{n\to\infty} (E + \frac{A}{n})^n$$

.

Эквивалентность двух определений экспоненты будет доказана позже.

11.8 Формула Эйлера как предельный случай формулы Муавра

Докажем формулу Эйлера. **Доказательство**

$$e^z = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n, \ z = x + iy.$$

Тогда, по формуле Муавра

$$|e^z| = \lim_{n\to\infty} |1 + \frac{z}{n}|^n, \quad \arg e^z = \lim_{n\to\infty} n \arg(1 + \frac{z}{n}).$$

Но

$$|1 + \frac{z}{n}| = 1 + \frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}), \ \arg(1 + \frac{z}{n}) = \frac{y}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Следовательно,

$$|e^z| = e^x, \ \arg e^z = y.$$

□