10 Лекция 10. Линейные уравнения высших порядков со специальной правой частью

Этот текст воспроизводит вторую половину лекции 10; первая половина вошла в конспект лекции 9. Текст совпадает с параграфом 5.2.5 книги. Мы оставили без изменений минимальную разницу в обозначениях между книгой и лекцией; это не должно затруднить понимания.

10.1 Специальная правая часть: нерезонансный случай

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами:

$$L(p)x = f(t) \tag{1}$$

Его можно решить методом вариации постоянной и получить формулу для решения, содержащую интегралы. Но если функция $f(t)$ имеет специальный вид — является линейной комбинацией *квазимногочленов* — решение можно получить гораздо проще и без интегрирования.

Определение 1 *Квазимногочленом называется произведение многочлена p на экспоненту $e^{\mu x}$, $\mu \in \mathbb{C}$. Число μ называется показателем квазимногочлена, а степень p — степенью квазимногочлена.*

Пространство квазимногочленов степени не выше m с показателем μ *над $\mathbb{C}$ мы обозначим $K_m^\mu(\mathbb{C})$.*

Сначала сделаем следующее простое наблюдение.

Предложение 1 *Если функция x_1 является решением уравнения $L(p)x = f_1$, а функция x_2 является решением уравнения $L(p)x = f_2$, то функция $x = x_1 + x_2$ является решением уравнения $L(p)x = f_1 + f_2$.*

Доказательство Действительно, $L(p)x = L(p)x_1 + L(p)x_2 = f_1 + f_2 = f$. □

Теперь мы будем заниматься только случаем, когда в правой части уравнения стоит квазимногочлен. Если правая часть является суммой квазимногочленов с разными показателями, можно воспользоваться предыдущим предложением.

Чтобы найти все решения неоднородного уравнения $L(p)x = f(t)$, нужно найти *одно* частное решение этого уравнения и прибавить к нему всевозможные решения соответствующего однородного уравнения $L(p)x = 0$. Поэтому нам достаточно научиться находить одно частное решение неоднородного уравнения $L(p)x = f(t)$, где f — квазимногочлен.

Определение 2 *Уравнение $L(p)x = f$, где $f(t) \in K_m^\mu(\mathbb{C})$ — квазимногочлен, называется* нерезонансным*, если показатель квазимногочлена μ не является корнем характеристического многочлена L. В противном случае уравнение называется* резонансным.

Теорема 1 (о нерезонансном случае) *Пусть уравнение (1) нерезонансное и $f(t) \in K_m^\mu(\mathbb{C})$ — квазимногочлен степени m. Тогда у него есть решение, принадлежащее пространству $K_m^\mu(\mathbb{C})$. Такое решение единственно и имеет степень ровно m.*

Итак, уравнение имеет частное решение, которое является квазимногочленом с тем же показателем и той же степени, что и правая часть.

Пользуясь этой теоремой, можно искать решение уравнения (1) с неопределенными коэффициентами: подставить в уравнение квазимногочлен $x(t) \in K_m^\mu(\mathbb{C})$ общего вида и подобрать коэффициенты этого многочлена, чтобы уравнение правращалось в равенство.

Доказательство Положим $x = q(t)e^{\mu t}$ и применим формулу сдвига:

$$L(p)\left(q(t)e^{\mu t}\right) = e^{\mu t}L(p+\mu)q(t).$$

Пусть $f(t) = r(t)e^{\mu t}$. Тогда $x(t)$ является решением уравнения если и только если $L(p+\mu)q(t) = r(t)$. Осталось доказать такое предложение. Пусть $\mathcal{P}_n$ — пространство многочленов степени не выше n.

Предложение 2 *Если многочлен M имеет ненулевой свободный член, то оператор $M(p)$ задаёт изоморфизм пространства $\mathcal{P}_n$ на себя.*

Так как λ не является корнем многочлена L, свободный член многочлена $M(x) := L(x+\lambda)$ ненулевой. Поэтому из предложения будет следовать, что отображение $L(p+\lambda)$ в пространстве $\mathcal{P}_n$ обратимо, то есть у уравнения $L(p+\lambda)q(t) = r(t)$ есть единственное решение степени $\deg q = \deg r = m$. Это доказывает теорему 1.

Доказательство [Доказательство предложения] Пусть $M(p) = m_0 + m_1 p + \cdots + m_k p^k$, $m_0 \neq 0$. Заметим, что отображение p и его степени понижают степень многочлена. Поэтому в сумме

$$M(p)q(t) = m_0 q(t) + m_1 \frac{d}{dt}q(t) + \cdots + m_k \frac{d^k}{dt^k}q(t)$$

все слагаемые, кроме первого, имеют степень меньше n, а первое слагаемое имеет степень n. Значит, многочлен $M(p)q(t)$ имеет степень n.

Отсюда следует, что оператор $M(p)$ сохраняет степень многочлена, поэтому никакой ненулевой многочлен он не может переводить в ноль. Значит, оператор $M(p)$ задаёт изоморфизм. $\square$

$\square$

10.2 Резонансный случай

Чтобы пояснить, почему случай, когда μ является корнем характеристического многочлена, называется резонансным, приведём такой пример.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}).$$

Это уравнение описывает пружинный маятник, к которому прикладывают периодически изменяющуюся внешнюю силу $f(t) = \sin \omega t$. Характеристический многочлен уравнения имеет вид $L(z) = z^2 + 1$, его корни равны $\pm i$. Поэтому нерезонансный случай — это случай $\omega \neq 1$. Предыдущая лемма показывает, что решением уравнения будет линейная комбинация экспонент $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$, то есть линейная комбинация $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Такую линейную комбинацию легко найти методом неопределенных коэффициентов. Положим $x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$ и подставим это выражение в уравнение. Получим

$$-a\omega^2 \sin \omega t - b\omega^2 \cos \omega t + a \sin \omega t + b \sin \omega t = \sin \omega t,$$

откуда $b = 0, a = \frac{1}{1-\omega^2}$, и

$$x_{\text{част}}(t) = \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2}.$$

Значит, маятник колеблется с постоянной амплитудой $\frac{1}{1-\omega^2}$, а период колебаний такой же, как и у внешней силы. При подходе к резонансу $\omega = \pm 1$ амплитуда растет.

Общее решение уравнения является суммой частного решения $x_{\text{ част }}$ и общего решения однородного уравнения $\ddot{x} = -x$:

$$x(t) = \frac{\sin \omega t}{1 - \omega^2} + c \cos t + d \sin t.$$

то есть представляет собой сумму колебания с частотой, равным частоте внешней силы, и колебания с собственной частотой (с которой система колеблется в отсутствии внешней силы).

Если же $\omega = \pm 1$ (резонансный случай), то легко проверить, что общим решением будет функция

$$x(t) = \mp \frac{t}{2} \cos t + c \cos t + d \sin t.$$

При $t \to \infty$ амплитуда таких колебаний стремится к бесконечности.

Итак, при подходе к резонансу амплитуда колебаний пружинного маятника увеличивается. Это соответствует понятию резонанса, принятому в физике. Когда на механическую систему воздействует периодически меняющаяся внешняя сила, частота которой близка к собственной частоте системы, эта система *входит в резонанс*: амплитуда её колебаний резко возрастает. Известно, что перед мостом колонне солдат дают команду «идти не в ногу»: иначе, если ритм их шага будет близок к резонансному значению, мост может разрушиться.

Как же решать уравнение в резонансном случае, когда μ является одним из корней характеристического многочлена? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 2 *(о резонансном случае) Рассмотрим уравнение $L(p)x = f$ с правой частью $f \in K_m^\mu(\mathbb{C})$. Пусть показатель μ является корнем характеристического многочлена L кратности k (если μ — не корень L, то мы считаем $k = 0$). Тогда существует единственный квазимногочлен $g \in K_m^\mu(\mathbb{C})$, для которого функция $x = t^k g(t)$ является решением уравнения* (1).

Итак, у уравнения есть решение, которое является квазимногочленом с тем же показателем, что и правая часть, но его степень на k выше, чем степень правой части.

Доказательство В случае $k = 0$ утверждение теоремы следует из предыдущей. Пусть $k > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu = \lambda_1$; положим $L(z) =: (z-\mu)^k M(z)$. По формуле сдвига

$$M(p)(p-\mu)^k \left(q(t)e^{\mu t}\right) = e^{\mu t} M(p+\mu)p^k q(t).$$

Значит, $x(t) = q(t)e^{\mu t}$ является решением уравнения если и только если $M(p+\mu)p^k q(t) = r(t)$. По предложению 2, оператор $M(p+\mu)$ в $\mathcal{P}_m$ обратим. Значит, существует единственный многочлен $s(t)$, для которого $M(p+\mu)(s(t)) = r(t)$ и $\deg s = m$. Таким образом, осталось решить уравнение $p^k q(t) = s(t)$, то есть

$$\frac{d^k}{dt^k} q(t) = s(t), \tag{2}$$

где $q \in \mathcal{P}_{m+k}$, $s \in \mathcal{P}_m$. Для этого достаточно k раз проинтегрировать равенство (2). Степень полученного многочлена q будет ровно $m+k$. Он будет определен неоднозначно: прибавление к q любого многочлена степени не выше $k-1$ не нарушает равенство. Поэтому можно найти многочлен q, не содержащий одночленов степени ниже k. Он имеет вид $t^k\tilde{q}$. Решение уравнения имеет вид $t^k\tilde{q}e^{\mu t}$, что и требовалось. □

10.3 Метод комплексных амплитуд

Научившись решать линейные уравнения с одним квазимногочленом в правой части, мы, тем самым, научились находить решения линейных уравнений с суммой квазимногочленов в правой части (см. предложение 1). Это позволяет решать уравнения, в правой части которых стоит произведение квазимногочлена на синус или косинус. Действительно, такая правая часть является суммой двух квазимногочленов, поскольку

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Однако для вещественного оператора L уравнения

$$L(p)x = Q(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \qquad \text{и} \qquad L(p)x = Q(t)e^{\alpha t}\sin\beta t \tag{3}$$

с вещественным многочленом Q и вещественными α и β решаются проще. Заметим, что для $f(t) := Q(t)e^{(\alpha+i\beta)t}$ выполнено

$$Q(t)e^{\alpha t}\cos\beta t = \mathrm{Re}\ f(t), \qquad Q(t)e^{\alpha t}\sin\beta t = \mathrm{Im}\ f(t).$$

Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ — решение уравнения

$$L(p)z = f(t). \tag{4}$$

Если две комплексные функции равны, то равны их действительные и мнимые части. Из (4) следует

$$L(p)x = \mathrm{Re}\ f(t) = Q(t)e^{\alpha t}\cos\beta t,\ L(p)y = \mathrm{Im}\ f(t) = Q(t)e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

то есть $x(t) = \Re z(t)$ и $y(t) = \Im z(t)$ — решения уравнений (3).

Итак, чтобы решить уравнения (3), достаточно решить уравнение (4) с *комплексным* квазимногочленом в правой части, а затем взять вещественную и мнимую часть решения. В этом и состоит *метод комплексных амплитуд.*

Следующий пример объясняет происхождение названия метода. Рассмотрим вещественное уравнение

$$L(p)x = \sin\omega t \tag{5}$$

Например, такой вид имеет уравнение $\ddot{x} + x = \sin\omega t$ движения пружинного маятника под воздействием внешней периодической силы $f(t) = \sin\omega t$, которое мы рассматривали ранее. В соответствии с методом комплексных амплитуд, заменим уравнение (5) на уравнение

$$L(p)z = e^{i\omega t}. \tag{6}$$

В нерезонансном случае, когда $L(i\omega) \neq 0$, частное решение уравнения (6) имеет вид

$$z_{\text{част}} = ce^{i\omega t},$$

где $c = \frac{1}{L(i\omega)}$. Пусть $c = re^{i\varphi}$ — тригонометрическая форма записи комплексного числа c. Тогда частное решение уравнения (5) равно

$$x_{\text{част}} = \mathrm{Im}\ ce^{i\omega t} = r\sin(\omega t + \varphi).$$

Число c называется *комплексной амплитудой* решения $x_{\text{част}}$. Система колеблется с амплитудой $r = |c|$, равной модулю комплексной амплитуды c. Частота колебаний равна частоте внешней силы. Колебание системы *сдвинуто по фазе* относительно внешней силы $f(t) = \sin\omega t$; сдвиг фазы $\varphi = \arg c$ равен аргументу комплексной амплитуды. Итак, комплексная амплитуда содержит информацию об амплитуде и фазе решения.