Задачи 4. 21.10.2023

1. Рассмотрим следующие стохастические матрицы:

$$a)\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0.9&0.1&0\end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad d)\ \begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&0&1/2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

   Какие из них s-положительны и для какого s?

   Указание: не нужно возводить матрицу в степень, смотрите на граф!

2. Верно ли, что всякая марковская цепь с конечным числом состояний, имеющая единственное стационарное состояние, перемешивает? Если да — докажите, если нет — приведите контрпример.

3. Рассмотрим модель Эренфестов: берем N пронумерованных от 1 до N шаров и два ящика, часть шаров лежит в одном, а часть в другом. Наугад называем номер от 1 до N (с равными вероятностями) и перекладываем шар с этим номером из ящика, где он лежал, в другой. Нас интересует число шаров в каждом ящике. Конечно, достаточно знать число шаров в первом ящике, на это имеется $N+1$ возможность, от 0 до N.

   (1) Докажите, что модель Эренфестов задает марковскую цепь с $N+1$ состоянием (состояние– число шаров в первом ящике). Вычислите переходные вероятности.

   (2) Найдите стационарное состояние для модели Эренфестов. Единственно ли оно? [1]

   (3) Является ли матрица переходных вероятностей в модели Эренфестов s-положительной для какого-либо s?

   (4) Перемешивает ли марковская цепь из модели Эренфестов?

   Следующая задача дает пример перемешивающей цепи, МПВ которой не s-положительна. Возьмите $L=2$, нарисуйте граф цепи и запомните его как простейший пример такой ситуации.

4. Рассмотрим (однородную) марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \dots$ с конечным множеством состояний $\{1, \dots, L\}$, $L \geq 2$, такую что $p_{11} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $2 \leq i \leq L$ существует $k_i \geq 1$, такое что $p_{i1}^{(k_i)} > 0$ — вероятность перейти из состояния i в состояние 1 за k_i шагов положительна.

   а) Покажите, что МПВ такой МЦ не может быть s-положительной ни для какого s.

   б) Докажите, что последовательность $(p_{i1}^{(m)})_{m\geq 0}$ не убывает.

   в) Покажите, что $\mathbb{P}(\xi_{mk} \neq 1) \leq (1-\delta)^m$ для любого $m \geq 1$, где $k = \max_i k_i$, а $\delta = \min_i p_{i1}^{(k_i)} > 0$.

[1] А здесь ответ хороший, как часто бывает в задачах, приходящих из физики.

А теперь выводы:

г) Покажите, что $\mathbb{P}(\exists k \geq 0: \ \xi_n = 1 \, \forall n \geq k) = 1$ (т.е. с вероятностью единица мы приезжаем в состояние 1 и там живем.)

д) Покажите, что такая марковская цепь перемешивает и $\pi = (1, 0, \ldots, 0)$ — ее единственное стационарное состояние.

5. *Необязательная задача (дополняющая предыдущую)*. Рассмотрим марковскую цепь $\xi_0, \xi_1, \ldots$, с множеством состояний $\{1, \ldots, L\}$, $L \geq 2$, такую что $p_{11} = 1$ и $p_{22} = 1$. Допустим, что для каждого состояния $3 \leq i \leq L$ существует $k_i \geq 1$, такое что хотя бы одна из вероятностей $p_{i1}^{(k_i)}$ либо $p_{i2}^{(k_i)}$ положительна. Покажите, что такая марковская цепь не может быть перемешивающей. Докажите, что

$$\mathbb{P}(\exists k \geq 0: \ \xi_n = 1 \, \forall n \geq k \text{ or } \xi_n = 2 \, \forall n \geq k) = 1$$

(т.е., в зависимости от точки старта, мы падаем либо на состояние 1, либо на состояние 2).

О модели Эренфестов.

Модель супругов Эренфест (Пауль 1880-1933 и Татьяна 1876-1964, см. Вики)– известная ранняя стохастическая модель в статистической механике. Статистическая механика (=статистическая физика) ставит своей целью объяснить макроскопическое поведение системы с точки зрения микроскопической динамики частиц, ее составляющей. Например, теплопроводность газа с точки зрения динамики его молекул.

Возникают следующие вопросы. Почему газ, изначально собранный в одной половине комнаты, распространится по всей комнате и уже никогда не вернется в ту половину, где он был изначально? Ведь согласно теореме Пуанкаре о возвращении [2] это должно произойти (но тут ответ простой: время, которое придется ждать, чтобы это произошло, больше времени существования вселенной). А вот гораздо более сложный, *до сих пор открытый вопрос* (грубо говоря, это называется "эргодическая гипотеза"): почему газ равномерно заполнит обе половины комнаты, и если температура газа в начальный момент времени была распределена неоднородно, то со временем она выровняется?

Модель Эренфестов – простейшая модель, чтобы изучать "равномерное заполнение газом комнаты". Как вы видели из задачи 3, эта модель не очень хороша: она не обладает свойством сходимости к равновесию (перемешиванием), так что "равномерного заполнения комнаты"и "выравнивания температуры" не происходит (хотя "почти" происходит). Более подробно на доступном языке о модели Эренфестов можно почитать в книге М.Кац, "Вероятность и смежные вопросы в физике". Речь о том, почему вообще вероятностные модели появляются в физике и почему они хороши. В первом приближении тут такое правило: чем больше в модели стохастики, тем проще она для строгого анализа (учи теорвер!), но тем дальше она от жизни (реальные молекулы не прыгают случайно из одной половины комнаты в другую). Однако,

[2] См. Википедию, а лучше, к примеру, В.И. Арнольд, "Математические методы классической механики".

согласно современному пониманию статистической физики, какую-то случайность в систему все равно нужно вводить, иначе (а) не получится провести никакого строгого анализа (б) ее поведение далеко не всегда будет соответствовать нашим физическим ожиданиям. [3]

Тем, кому интересно, очень порекомендую научно-популярную книгу Д.Рюэль, "Случайность и хаос̈– сравнительно коротко и классно о том же, на популярном языке, от одного из известнейших статистических физиков 20-го и 21-го веков.

[3] Насколько мне известно, когда делается прогноз погоды, в уравнения метеорологии добавляется случайный шум: так результат оказывается лучше.