

## Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту [alggem23@gmail.com](mailto:alggem23@gmail.com), желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

ВНИМАНИЕ! Следующее занятие 7 НОЯБРЯ!

### Задания с 5 занятия.

- (1) а) Мы видели, что все бирациональные автоморфизмы  $\mathbb{P}^1$  являются проективными. Приведите пример нерегулярного (и тем самым непроективного) бирационального автоморфизма  $\mathbb{P}^2$ .  
б) Приведите пример бирегулярного автоморфизма аффинной плоскости  $\mathbb{A}^2$ , не являющегося аффинным.
- (2) Вспомните определение двойного отношения четверки точек на проективной прямой. Как действует группа перестановок четырех точек  $S_4$  на значения двойного отношения? Сколько различных значений может принимать двойное отношение при перестановках точек? Какая подгруппа в  $S_4$  не меняет двойное отношение?
- (3) а) Докажите, что проективная инволюция  $\mathbb{P}^1$  всегда имеет две неподвижные точки и однозначно задается парой своих неподвижных точек.  
б) Докажите, что если  $f$  проективная инволюция  $\mathbb{P}^1$  с неподвижными точками  $A$  и  $B$  и  $D = f(C)$  ( $C \neq D$ ), то двойное отношение  $(A, B, C, D) = -1$ .
- (4) Отображение в Веронезе  $v_{n,d} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^N$  ( $N = \binom{n+d}{d} - 1$ ), задается формулами  $w_I = x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$  (здесь  $x_i$  это координаты в  $\mathbb{P}^n$ ,  $I = (i_0, \dots, i_n)$  — мультииндекс,  $i_0 + \dots + i_n = d$ , а  $w_I$  это координаты в  $\mathbb{P}^N$ ). Докажите, что образ отображения отображения Веронезе  $v_{n,d}(\mathbb{P}^n)$  задается в  $\mathbb{P}^N$  всевозможными уравнениями вида  $w_I w_J = w_K w_L$ , где  $I + J = K + L$ .

(5) Вопросы про  $v_{1,3} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ .

- а) Найдите степень кривой  $X$  (т.е. число точек ее пересечения с общей плоскостью).
- б) Найдите размерность пространства квадрик, проходящих через  $X$ .
- в) Найдите геометрическое описание особых квадрик, проходящих через  $X$ .
- г) Докажите, что через любую точку  $\mathbb{P}^3$ , не лежащую на  $X$ , проходит ровно одна хорда (или касательная) кривой  $X$ .

Кроме того, осталась неразобранной задача 8 из позапрошлого задания, которую мы обязательно обсудим в проективной постановке (см комментарий в конце прошлого задания). Остались также задачи 1 и 3 из прошлого задания.