

Семинарский листок 5
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Предел функции, замечательные пределы, односторонний предел, О-большое и о-малое

1. Докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

2. Найдите пределы функций (числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, числа $m, n \in \mathbb{N}$):

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} \sqrt[m]{1+\beta x} - 1}{x}.$$

3. Вычислите пределы функций

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \sin(x \sin x), \quad b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{a - x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1 - 5x}{x^2 + x^5}, \quad f) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 25}, \quad g) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}},$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

4. Найдите следующие пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

5. Вычислите односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} 2^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} 2^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} 1/x.$$

6. Докажите, что при $x \rightarrow 0$

$$\operatorname{tg} x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad e^x - 1 \sim x, \quad (1+x)^n - 1 \sim nx.$$

Выведите отсюда, что

$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad e^x - 1 = x + o(x), \quad (1+x)^n - 1 = nx + o(x).$$

7. С помощью понятий o и O вычислите

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{x}.$$