Семинарский листок 6
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Свойства непрерывных функций, точки разрыва, монотонные функции

1. Покажите, что каждый многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один вещественный корень.

2. Пусть функция f отображает в себя отрезок $[a, b]$ и непрерывна. Доказать, что существует неподвижная точка, т.е. точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

3. Пусть f непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что полный прообраз точки — замкнутое множество.

4. Исследовать функции на непрерывность:

$$a)\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}, \quad b)\ g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

5. Докажите, что не существует непрерывной функции, которая принимает рациональные значения в иррациональных точках и наоборот.

6. Доказать, что функция Дирихле всюду разрывна, а функция Римана разрывна в рациональных точках.

7. Покажите, что функция $\sin(x^{-1})$ имеет разрыв второго рода в нуле, а функция $x\sin(x^{-1})$ имеет устранимый разрыв в нуле.

8. (a) Докажите, что у монотонной функции могут быть только разрывы первого рода.
(b) Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счётно.

9. (a) Докажите, что непрерывная функция является биекцией отрезка тогда и только тогда, когда она строго монотонна.
(b) Докажите, что множество значений монотонной функции, заданной на промежутке, является промежутком, если и только если функция непрерывная
(c) Докажите, что строго монотонная функция f на отрезке $[a, b]$ имеет обратную f^{-1}, определённую на отрезке $[f(a), f(b)]$, если и только если она непрерывная. Докажите, что обратная функция также строго монотонна и непрерывна, при этом она возрастает, если f возрастает, и убывает, если f убывает.

10. (a) Докажите существование непрерывной строго монотонной функции $f(x) = a^x,\ x \in \mathbb{R}$.
(b) Выведите из (a) существование непрерывной монотонной функции $\log_a x,\ a \neq 1$.
(c) Выведите из (a) и (b) существование непрерывной монотонной функции $x^\alpha,\ x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.