13 Лекция 13. Особые точки линейных систем на плоскости.

13.1 Овеществление.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ и забудем в нем комплексную структуру: запретим умножение на i. Векторы ξ и $i\xi$ линено независимы над $\mathbb{R}$ при $\xi \neq 0$. Полученное пространство обозначается через ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$; оно изоморфно $\mathbb{R}^{2n}$.

Овеществление линейного оператора $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ - это оператор

$$^{\mathbb{R}}A : \ ^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \to \ ^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n,$$

поточечно совпадающий с A, но только $\mathbb{R}-$, а не $\mathbb{C}$-линеный. Его матрица имеет размер $2n \times 2n$.

Пример. $n = 1$.

Оператор $A : \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ - это умножение на комплексное число $\lambda = a + bi$. Его овеществление - это оператор

$$^{\mathbb{R}}\lambda : 1 \mapsto a + bi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}., \ i \mapsto -b + ai = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}..$$

Матрица оператора:

$$^{\mathbb{R}}\lambda = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{1}$$

13.2 Условия Коши-Римана.

Голоморфная функция - это та, дифференциал которой $\mathbb{C}$-линеен:

$$df = (a + bi)dz.$$

Если $f = u(x, y) + iv(x, y)$, то

$$a + bi = u_x + iv_x$$

Овеществление этого $\mathbb{C}$-линейного оператора $\mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ имеет матрицу

$$J = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}. \tag{2}$$

С другой стороны - это матрица Якоби для отображения

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)) :$$

$$J = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Отсюда:

$$u_y = -v_x, \ v_y = u_x -$$

условия Коши-Римана.

13.3 Фокус и центр.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{z} = \lambda z,\ z \in \mathbb{C}^1,\ \lambda = a + bi. \tag{4}$$

Тогда

$$z(t) = e^{\lambda t}\, z(0).$$

Напомним:

$$|e^{\lambda t}| = e^{at}, \arg e^{\lambda t} = bt.$$

При $b \neq 0$ фазовые кривые уоавнения (4) в полярных координетах имеют вид:

$$r = Ce^{\frac{a}{b}t}.$$

При $a \neq 0$ это спирали, наматывающиеся на особую точку 0 при $\frac{a}{b} < 0$ в прямом времени, и при $\frac{a}{b} > 0$ - в обратном (фокус).

При $a = 0$ это - концентрические окружности (центр).

13.4 Нормальная форма линейных операторв $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ с комплексными собственными значениями.

Лемма 1 *Пусть $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет собственные значения $a \pm bi,\ b \neq 0$. Тогда этот оператор линейно эквивалентен оператору ${}^{\mathbb{R}}(a + bi)$.*

Доказательство Нужно доказать, что в некотором базисе оператор A имеет матрицу (1). Рассмотрим собственный вектор $(\xi + i\eta),\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ с собственным значением $a - bi$. Проверим, что в базисе ξ, η оператор A имеет матрицу (1). Имеем:

$$A(\xi + i\eta) = (a - bi)(\xi + i\eta) = a\xi + b\eta + i(-b\xi + a\eta).$$

В базисе (ξ, η),

$$\xi \mapsto a\xi + b\eta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$\eta \mapsto (-b\xi + a\eta) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

$\square$

13.5 Седло, узел, фокус, центр

.

Напомним, что фазовые портреты аод названием "седло"и "узел"уже рассматривались в наших лекциях.

Теорема 1 *(Пуанкаре). Линейная система на плоскости с невырожденным оператором в правой части имеет особую точку одного из 4х типов: седло, узел (включая так называемый жорданов узел), фокус, центр .*

Доказательство Пусть оператор A имеет базис из вещественных собственных векторов, x и y - координаты в этом базисе. Тогда уравнение (4) имеет вид:

$$\dot{x} = \lambda x$$

$$\dot{y} = \mu y.$$

Фазовый портрет этого уравнения - седло или узел, как объяснялось в лекции .

Пусть оператор A имеет комплексные значения. Тогда соответствующий фазовый портрет - фокус или центр, как объяснено выше.

Остается случай вещественных собственных значений, когда собственного базиса нет. Нормальная форма A - одна жорданова клетка. Можно сразу считать, что

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 0,$$

поскольку оператор A невырожден. ФСР уравнения (4) имеет вид:

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi^2(t) = \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Система однородна, фазовый портрет инвариантен относительно растяжений. Достаточно нарисовать фазовые кривые решений φ^1 и φ^2. Для φ^1 это положительная полуось оси x. Для φ^2 это график функции $x(y) = y\frac{\ln y}{\lambda}$, см. рис. 5.4 в учебнике. □

13.6 Особые точки нелинейных систем.

Пуанкаре исследовал особые точки линейных систем не ради их самих, а ради исследования нелинейных систем. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + f(x), \ f(x) = O(|x|^2), \ x \in \mathbb{R}^n \tag{5}$$

Один из основных вопросов локальной теории дифференциальных уравнений состоит в следующем: *В какой мере фазовый портрет нелинейного уравнения* (5) *похож на фазовый портрет его линейной части* $\dot{x} = Ax$*?*

Для произвольного n этот вопрос составил содержание большой теории, не завершенной и до наших дней. Для $n = 2$ этот вопрос в основном решен математиками разных поколений, вплоть до ныне живущих.

Грубо говоря, вопрос о сходстве фазовых портретов решается так. Фазовые портреты нелинейных уранений с линейной частью седло, узел (включая жорданов узел) получаются из фазовых портретов для линенйых частей с помощью малой деформации. Линенйые центры полностью разрушаютмя при добавлении нелинейных членов.