Введение в теневой анализ[1]

Соглашения. Обозначим через $D\colon \mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}[x]$, $f\mapsto f'$, линейный оператор дифференцирования и сопоставим каждому формальному степенному ряду $\varphi(t)=\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k t^k\in\mathbb{Q}[\![t]\!]$ линейный оператор $\varphi(D)\colon \mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}[x]$, $f\mapsto\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k D^k f=\varphi_0 f+\varphi_1 f'+\varphi_2 f''+\dots$, а также ковектор $\varphi\in\mathbb{Q}[x]^*$, переводящий многочлен $f(x)$ в число $\langle\,\varphi\,,\,f\,\rangle\overset{\text{def}}{=}\mathrm{ev}_0(\varphi(D)f)$, равное значению многочлена $\varphi(D)f$ при $x=0$.

ГЛ4½◇1*. Как действуют на $\mathbb{Q}[x]$ линейные операторы $e^{\alpha D}=\sum_{k\geqslant 0}\frac{\alpha^k}{k!}D^k$, где $\alpha\in\mathbb{Q}$?

ГЛ4½◇2*. Убедитесь, что сопоставление степенным рядам ковекторов задаёт линейный изоморфизм векторных пространств $\mathbb{Q}[\![t]\!]\xrightarrow{\sim}\mathbb{Q}[x]^*$. Для каждого $\alpha\in\mathbb{Q}$ укажите ряд, соответствующий функционалу вычисления $\mathrm{ev}_\alpha\colon\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}$, $f\mapsto f(\alpha)$. Опишите линейные операторы $\mathbb{Q}[\![t]\!]\to\mathbb{Q}[\![t]\!]$, двойственные к следующим операторам $\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}[x]$:
- **а)** умножение на $x\colon f(x)\mapsto x\cdot f(x)$ **б)** дифференцирование $D\colon f(x)\mapsto f'(x)$
- **в)** сдвиг $T_\alpha\colon f(x)\mapsto f(x+\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{Q}$ **г)** $\Delta\colon f(x)\mapsto f(x+1)-f(x)$ и $\nabla\colon f(x)\mapsto f(x)-f(x-1)$.

ГЛ4½◇3*. Убедитесь, что отображение $\mathbb{Q}[\![t]\!]\to\mathrm{End}\big(\mathbb{Q}[x]\big)$, $\varphi\mapsto\varphi(D)$, является инъективным гомоморфизмом $\mathbb{Q}$-алгебр[2], и докажите, что его образ состоит из всех линейных операторов $F\colon\mathbb{Q}[x]\to\mathbb{Q}[x]$, которые удовлетворяют следующим эквивалентным условиям:
а) $\forall\,\alpha\in\mathbb{Q}\ FT_\alpha=T_\alpha F$ **б)** $FT_1=T_1F$ **в)** $FT_{-1}=T_{-1}F$ **г)** $F\Delta=\Delta F$ **д)** $F\nabla=\nabla F$ **е)** $FD=DF$.

ГЛ4½◇4*. Докажите равенства $\langle\,\varphi\psi\,,\,x^n\,\rangle=\langle\,\varphi\,,\,\psi(D)\,x^n\,\rangle=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\langle\,\varphi\,,\,x^{n-k}\,\rangle\langle\,\psi\,,\,x^k\,\rangle$.

ГЛ4½◇5*. Пусть ряд $\varphi(t)\in\mathbb{Q}[\![t]\!]$ имеет $\varphi_0=0$ и $\varphi_1\neq 0$. Покажите, что существует единственный такой ряд $\overline{\varphi}(t)\in\mathbb{Q}[\![t]\!]$, что $\overline{\varphi}(\varphi(t))=t$.

ГЛ4½◇6*. В условиях предыдущей задачи определим многочлены $p_k(x)\in\mathbb{Q}[x]$ равенством $e^{x\overline{\varphi}(t)}=\sum_{k\geqslant 0}p_k(x)\,t^k/k!$. Докажите для любых $\psi\in\mathbb{Q}[\![t]\!]$ и $q\in\mathbb{Q}[x]$ равенства
а) $\psi=\sum_{k\geqslant 0}\langle\,\psi\,,\,p_k\,\rangle\cdot\varphi^k/k!$ **б)** $q=\sum_{k\geqslant 0}\langle\,\varphi^k\,,\,q\,\rangle\cdot p_k/k!$.

ГЛ4½◇7* (многочлены Аппеля). *Многочленами Аппеля* ряда $\varphi(t)=\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k t^k/k!\in\mathbb{Q}[\![t]\!]$ называются образы $f_k(x)\overset{\text{def}}{=}\varphi(D)\,x^k$ базисных мономов x^k под действием оператора $\varphi(D)$. Покажите, что: **а)** $\varphi_n=f_n(0)$ **б)** $f_n'(x)=nf_{n-1}(x)$ **в)** $f_n(x+y)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}f_{n-k}(x)y^k$
г) $f_n(x)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\varphi_{n-k}x^k=(\varphi^\downarrow+x)^n$, где нисходящая стрелка у $\varphi^\downarrow$ предписывает раскрывать бином $(\varphi+x)^n$, формально заменяя все φ^k на φ_k.

ГЛ4½◇8* (приложение: суммы степеней). Ряд $\mathrm{td}(t)\overset{\text{def}}{=}t/(1-e^{-t})=\sum_{k\geqslant 0}\frac{b_k}{k!}t^k\in\mathbb{Q}[\![t]\!]$ называется *рядом Тодда*, его коэффициенты b_k — *числами Бернулли*, а его многочлены Аппеля $B_k(x)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{td}(D)\,x^k$ — *многочленами Бернулли*. Докажите, что следующие условия на последовательность многочленов $s_n(x)\in\mathbb{Q}[x]$, $n\in\mathbb{N}$, эквивалентны:
- **а)** $s_{n+1}(m)=0^n+1^n+\cdots+m^n$ при всех целых $m,n\geqslant 0$ **б)** $s_{n+1}(0)=0$ и $\nabla s_{n+1}(x)=x^n$
- **в)** $s_{n+1}(0)=0$ и $Ds_{n+1}(x)=\mathrm{td}(D)\,x^n$ **г)** $(n+1)\,s_{n+1}(x)=B_{n+1}(x)-b_{n+1}=(b^\downarrow+x)^{n+1}-b_{n+1}$.

ГЛ4½◇9*. Покажите, что $(n+1)b_n=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}b_{n-k}$ при всех $n\geqslant 2$, $b_0=1$, $b_1=1/2$, $b_2=1/6$, $b_{2k+1}=0$ при всех $k\in\mathbb{N}$. Вычислите все b_n с $n\leqslant 10$ и найдите[3] $s_{11}(1000)$.

ГЛ4½◇10*. Положим $c_k(x)=x(x+1)\cdots(x+k-1)/k!$ и $c_0(x)=1$. Докажите, что: **а)** $\nabla c_k=c_{k-1}$
б) $f(x)=\sum_{k\geqslant 0}\nabla^k f(0)\cdot c_k(x)=\sum_{k\geqslant 0}\nabla^k f(\alpha)\cdot c_k(x-\alpha)$ для всех $f\in\mathbb{Q}[x]$ и $\alpha\in\mathbb{Q}$
в) $c_n(x+y)=\sum_{k=0}^n c_{n-k}(x)\cdot c_k(y)$, т. е. ряды $C_x(t)=\sum_{k\geqslant 0}c_k(x)\cdot t^k$ перемножаются по правилу $C_x(t)\cdot C_y(t)=C_{x+y}(t)$.

---

[1] По-латыни: *umbral calculus*.

[2] Т. е. линейно над $\mathbb{Q}$ и переводит умножение рядов в композицию операторов.

[3] В те далёкие времена, когда не знали иных калькуляторов кроме счётов, Яков Бернулли (1654 – 1705) сосчитал сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел меньше, чем за половину четверти часа.

Персональный табель ____ . **Листок № 4½ (необязательный)**

(напишите свои имя, отчество и фамилию)

№	дата	кто принял	подпись
1			
2а			
б			
в			
г			
3			
4			
5			
6а			
б			
7а			
б			
в			
г			
8			
9			
10а			
б			
в			