

Метод Гаусса

Терминология. Матрица называется *приведённой ступенчатой*, если в каждой её строке самый левый ненулевой элемент равен единице, располагается строго правее, чем в предыдущей строке и является единственным ненулевым элементом своего столбца. Столбцы, где стоят эти единицы, принято называть *базисными*. У каждого векторного подпространства $U \subset \mathbb{k}^n$ есть единственный базис из векторов, координаты которых, записанные по строкам, образуют приведённую ступенчатую матрицу.

ГС6♦1. Найдите размерности и приведённые ступенчатые базисы \mathbb{Q} -линейных оболочек строк матриц

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -9 \\ -3 & -3 & -8 & 21 & -4 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & 16 & 7 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 3 & 12 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} & \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & -20 & -3 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & -11 & 9 \\ -2 & -1 & 6 & 14 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

ГС6♦2. Укажите базис над \mathbb{Q} в пространстве решений системы уравнений

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 + 8x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 10x_4 - 15x_5 + 27x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 15x_4 - 33x_5 + 40x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 8x_6 = 0 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 9x_5 + 12x_6 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 10x_4 - 29x_5 - 39x_6 = 0 \\ -3x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 11x_4 - 31x_5 - 42x_6 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 9x_3 - 7x_4 + 23x_5 + 30x_6 = 0 \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + 9x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 5x_4 - 4x_5 - 10x_6 = 0 \\ -x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 27x_6 = 0 \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 10x_5 + x_6 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 11x_5 - 9x_6 = 0 \end{cases} \end{array}$$

ГС6♦3. Для каждой из шести пар различных подпространств $U, W \subset \mathbb{Q}^6$ из предыдущей задачи найдите $\dim(U + W)$, $\dim(U \cap W)$ и укажите какие-нибудь базисы в $U + W$ и $U \cap W$.

ГС6♦4. Ответьте на те же вопросы про пары различных подпространств $U, W \subset \mathbb{Q}^5$ из задачи ГС6♦1, выберите все такие пары U, W , что $\mathbb{Q}^5 = U \oplus W$, и для каждой из них разложите вектор $v = (1, 1, 1, 1, 1)$ в сумму $u + w$ с $u \in U$ и $w \in W$.

ГС6♦5. Напишите систему из минимально возможного числа линейных уравнений, пространство решений которой совпадает с линейной оболочкой векторов

- а) $(1, 2, -1, -3), (-3, -6, 3, 10), (2, 4, -2, -7), (1, 2, -1, -1), (2, 5, -1, -9)$ в \mathbb{Q}^4
 б) $(1, -1, -3, 0, 3), (-2, 2, 6, 0, -6), (2, -1, -4, -2, 4), (-3, 4, 11, -2, -10)$ в \mathbb{Q}^5
 в) $(1, -1, -2, -7, 0, -3), (-2, 2, 5, 17, -1, 5), (-1, 1, 1, 4, 1, 4), (-2, 2, 6, 20, -2, 5)$ в \mathbb{Q}^6 .

ГС6♦6. Решите в поле \mathbb{Q} систему уравнений

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 11x_3 + 3x_5 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 - x_4 = -6 \\ -x_1 + 3x_2 + 11x_3 - x_5 = -7 \\ 2x_1 - 5x_2 - 19x_3 - x_4 + 2x_5 = 11 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 6x_5 = -3 \\ -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 18x_4 + 12x_5 = 8 \\ -2x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 13x_4 + 17x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - 10x_3 - 9x_4 + 15x_5 = 7 \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 10x_5 = -5 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 20x_5 = -4 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 14x_5 = 7 \\ -3x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 28x_5 = 13 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 8x_5 = -7 \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 23 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 19 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 31 \end{cases} \end{array}$$

ГС6♦7. В аффинном пространстве \mathbb{Q}^4 рассмотрим следующие аффинные подпространства:

- а) аффинную оболочку¹ точек $(2, -3, 0, -2)$, $(3, -4, -2, -1)$, $(2, -3, 1, -3)$, $(3, -4, -5, 2)$, $(0, -1, 8, -8)$
 б) $p + U$, где $p = (1, -2, 3, -4)$, а направляющее векторное пространство U порождается векторами $(1, 1, -3, 1)$, $(-3, -3, 9, -2)$, $(1, 1, -3, 2)$, $(-1, -1, 4, -5)$, $(3, 3, -12, 3)$
 в) $p + U$, где $p = (4, -3, 2, 1)$, а U задаётся уравнениями

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

г) множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 10 \\ 3x_1 + 10x_2 - 14x_3 - 3x_4 = 36 \\ -2x_1 - 8x_2 + 12x_3 - 2x_4 = -32 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -4 \\ 5x_1 + 18x_2 - 26x_3 = 69 \end{cases}$$

Найдите их размерности и укажите какой-нибудь аффинный репер в каждом из них. Для каждой из шести пар различных аффинных подпространств K , L , которые можно из них составить, выясните, пусто или нет пересечение $K \cap L$, и если не пусто, укажите в нём какой-нибудь аффинный репер.

ГС6♦8. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 точки $a = (1, -2, 3)$, $b = (-3, 1, -2)$, $c = (2, -3, 1)$, $d = (7, -5, 1)$. Сколько прямых проходит через начало координат и пересекает обе прямые (ab) и (cd) ? В каком отношении делит начало координат отрезок с концами в точках пересечения?

ГС6♦9. Прямая в \mathbb{Q}^4 проходит через точку $a = (-3, 3, -1, 5)$ и пересекает пространство решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 16x_3 - 14x_4 = -30 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 9x_4 = 2 \end{cases}$$

в точке b , а аффинную оболочку точек $(4, -3, 1, -2)$, $(1, 6, 4, 1)$, $(5, -6, 1, 0)$, $(0, 9, 7, 8)$ — в точке c . Найдите $\overline{ab} : \overline{ac}$.

ГС6♦10. Обратите идущие ниже матрицы методом Гаусса и проверьте ответ умножением

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 3 & -2 & -10 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{б)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 13 \\ -1 & -1 & 12 \end{pmatrix} & \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -9 & -20 \\ -5 & 16 & -44 \end{pmatrix} & \text{г)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -9 & -2 \\ 1 & 0 & -13 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{д)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 1 & 20 \\ 2 & 0 & -9 & -18 \end{pmatrix} & \text{е)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ -3 & 10 & -11 & 1 \\ 4 & -16 & 20 & 5 \\ -3 & 6 & -2 & 10 \end{pmatrix} & \text{ж)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -5 & 4 \\ -3 & -4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 7 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

¹Т. е. пересечение всех аффинных подпространств, содержащих указанные точки.