# Задачи для подготовки к контрольной № 2

**ПК2◇1 (устный счёт[1]).** В уме найдите матрицы, обратные к следующим матрицам $2 \times 2$:

**а)** $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **г)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ **д)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Проверьте результат умножением на бумажке.

**ПК2◇2.** Найдите базис в пространстве решений системы однородных линейных уравнений

**а)** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 - 8x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 11x_5 = 0 \end{cases}$

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_5 \\ x_3 = -x_5 \\ x_4 = 2x_5\,, \end{cases}$ базис в пространстве решений составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; в (б) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0\,, \end{cases}$ базисный вектор пространства решений $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**ПК2◇3.** Найдите базис в ядре и образе линейного оператора $F : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, матрица которого в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^4$ имеет вид

**а)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -5 & -7 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & -9 & -15 \end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & -12 & -9 \\ -1 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, базис в ядре составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, базис в образе — первый и третий столбцы исходной матрицы; в (б) приведённый ступенчатый вид матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, базис в ядре составляет вектор $(1, 1, 1, 0)$, базис в образе — первый, второй и четвёртый столбцы исходной матрицы.

**ПК2◇4.** Линейный оператор $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе из векторов

$$v_0 = (0, 1, -2)\,, \quad v_1 = (1, -1, -1)\,, \quad v_2 = (-2, 7, -7)\,.$$

Напишите матрицу оператора $F$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{Q}^3$.

[1] Умение быстро делать эту задачу абсолютно необходимо как на контрольной № 2, так и на всех последующих контрольных.

ответ: $F_e = C_{ev}F_vC_{ev}^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&-2\\1&-1&7\\-2&-1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0\\3&3&3\\0&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-14&-9&-5\\7&4&2\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-54&-33&-18\\145&83&42\\-107&-55&-24\end{pmatrix}$.

**ПК2⋄5.** Линейный оператор $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ имеет в стандартном базисе матрицу $\begin{pmatrix}3&4&0\\3&0&1\\0&3&4\end{pmatrix}$.

Напишите матрицу оператора $F$ в базисе из векторов

$$v_0 = (1,2,-1)\,,\quad v_1 = (1,2,0)\,,\quad v_2 = (-1,-1,-1)\,.$$

ответ: $F_v = C_{ev}^{-1}F_eC_{ev} = \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-3&2&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&0\\3&0&1\\0&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18&13&-3\\-27&-21&6\\-20&-19&10\end{pmatrix}$.

**ПК2⋄6.** Выясните, обратимы ли нижеследующие матрицы, и для обратимых найдите обратные, а для необратимых — их ранги:

**а)** $\begin{pmatrix}0&1&-2&1\\1&-4&2&0\\3&-3&-12&10\\-3&8&3&-4\end{pmatrix}$ **б)** $\begin{pmatrix}0&1&2&-2\\1&1&-1&4\\1&1&0&2\\-1&0&1&-1\end{pmatrix}$ **в)** $\begin{pmatrix}1&-2&-2&-1\\3&-6&-5&0\\2&-4&-6&-8\\2&-3&-10&-21\end{pmatrix}$.

ответ: в (а) $\begin{pmatrix}64&31&-4&6\\18&9&-1&2\\4&3&0&1\\-9&-3&1&0\end{pmatrix}$ в (б) $\begin{pmatrix}-1&-2&3&0\\3&4&-6&-2\\-2&-3&5&2\\-1&-1&2&1\end{pmatrix}$ в (в) матрица не обратима ранга 3.

**ПК2⋄7.** Обозначим через $U, W \subset \mathbb{Q}^4$ наименьшие по включению аффинные подпространства, проходящие, соответственно,

**а)** через точки $(-4,-4,6,1)$, $(-4,-5,9,0)$, $(-8,-1,21,-4)$, $(-10,-1,33,-8)$ и через точки $(4,-15,-14,-3)$, $(-13,25,-23,21)$, $(-11,17,-13,13)$, $(-9,9,-3,5)$.

**б)** через точки $(-4,-5,3,-3)$, $(0,7,-5,-4)$, $(-7,-14,9,0)$, $(-10,-23,15,0)$ и через точки $(-7,-14,11,6)$, $(-14,-35,28,20)$, $(-9,-20,17,14)$, $(-1,4,-5,-11)$.

Найдите $\dim U$, $\dim W$ и $\dim U \cap W$ или докажите, что $U \cap W = \varnothing$.

ответ: в (а) две непересекающиеся двумерные плоскости, в (б) две двумерные плоскости, пересекающиеся по прямой, проходящей через точку $(-3,-2,1,-3)$ параллельно вектору $(2,6,-4,-1)$.

**ПК2⋄8.** Решите в поле $\mathbb{Q}$ системы уравнений

**а)** $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-6x_4-x_5-3x_6=2\\ x_1+2x_2-x_3-9x_4-4x_5-13x_6=3\\ 3x_1+5x_2-x_3-24x_4-8x_5-26x_6=7\\ 3x_1+x_2+7x_3-12x_4+4x_5+14x_6=3\\ 2x_1+x_2+4x_3-9x_4+2x_5+7x_6=2 \end{cases}$$

**б)** $$\begin{cases} x_1+2x_2-7x_3-2x_4-2x_5+7x_6=4\\ -3x_1-6x_2+21x_3+7x_4+9x_5-32x_6=-16\\ 3x_1+6x_2-21x_3-3x_4+3x_5-12x_6=0\\ -3x_1-5x_2+19x_3+6x_4+14x_5-47x_6=-25\\ x_1+x_2-5x_3+2x_4+3x_5-14x_6=-1 \end{cases}$$

и укажите базисный репер в каждом аффинном пространстве решений.

ОТВЕТ: в (а) приведённый ступенчатый вид расширенной матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 3x_4 - x_6 + 3 \\ x_2 = 2x_3 + 3x_4 + x_6 - 2 \\ x_5 = -3x_6 - 1\,, \end{cases}$ аффинное пространство решений проходит через точку $(3, -2, 0, 0, -1, 0)$, а базис его направляющего векторного пространства составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; в (б) приведённый ступенчатый вид расширенной матрицы системы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ параметрическое описание пространства решений: $\begin{cases} x_1 = 3x_3 - x_6 - 2 \\ x_2 = 2x_3 + 2x_6 + 3 \\ x_4 = 2x_6 + 2 \\ x_5 = 3x_6 - 2\,, \end{cases}$ аффинное пространство решений проходит через точку $(-2, 3, 0, 2, -2, 0)$, а базис его направляющего векторного пространства составляют строки матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.