

Домашнее задание 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I
Срок сдачи: 30 ноября

Минимум из количества данных задач и 10 равняется оценке за листок. Для того, чтобы задача была засчитана полностью, нужно сдать все пункты.

1. Докажите следующие свойства o -малого:

(1) если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow a$;

пусть на некоторой проколотой окрестности точки a определены функции f и g , тогда при $x \rightarrow a$ верно, что:

(2) $o(c(f(x))) = o(f(x))$, где $c \in \mathbb{R}$;

(3) $o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x))$;

(4) $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$;

(5) $o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x))$;

(6) $|o(f(x))|^p = o(|f(x)|^p)$, $p > 0$;

пусть $m, n \in \mathbb{N}$ и $x \rightarrow 0$, тогда верно, что:

(7) $x^{n+1} = o(x^n)$;

(8) $o(x^m) = o(x^n)$, $m \geq n$;

(9) $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$;

(10) $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$;

(11) $(o(x^n))^m = o(x^{nm})$;

(12) $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^{\min\{m;n\}})$.

2. Докажите следующие свойства O -большого:

пусть на некоторой проколотой окрестности точки a определены функции f и g , тогда при $x \rightarrow a$ верно, что:

(1) $O(c(f(x))) = O(f(x))$, где $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(2) $O(f(x)) \pm O(f(x)) = O(f(x))$;

(3) $O(f(x)) \cdot O(g(x)) = O(f(x) \cdot g(x))$;

(4) $o(f(x)) \cdot O(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$;

(5) $o(O(f(x))) = o(f(x))$, $O(o(f(x))) = o(f(x))$, $O(O(f(x))) = O(f(x))$;

(6) $|O(f(x))|^p = O(|f(x)|^p)$, $p > 0$;

3. При каких a, b справедливы равенства

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - ax - b) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 2x^3} - cx^2 - ax - b) = 0?$$

4. Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^N - N}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 12x + 16}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4 + 2x + x^2} - \sqrt{x^2 - 4x + 1},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln(1-2x) + 2x + 2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+4x^2} - e^{2x} + 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg}(\pi x)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos(2x))}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + 5\pi/2) \operatorname{tg} x}{\arcsin(2x^2)}.$$

5. Исследовать на непрерывность следующие функции:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^n + 1}, \quad g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (\sin x)^{2n}}.$$

6. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и множество $f(\mathbb{Q})$ ограничено. Ограничено ли множество $f(\mathbb{R})$?

7. Докажите, что функция f непрерывна на прямой тогда и только тогда, когда для всякого открытого множества U множество $f^{-1}(U)$ также открыто.

8. Существует ли непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, принимающая каждое значение ровно два раза?

9. Докажите неравенства

1) $x^\alpha - 1 \geq \alpha(x - 1)$ при $x \geq 1, \alpha \geq 2$, 2) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} \geq (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \beta$.

10. Найти первые производные следующих функций:

$$\frac{1 - x^2}{x} \sqrt[5]{x^3 + \frac{1}{x}}, \quad x - 3 \ln \left((1 + e^{x/6}) \sqrt{1 + e^{x/3}} \right) - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6}, \quad \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\frac{\operatorname{sh} x}{4 \operatorname{ch}^4 x} + \frac{3 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x), \quad \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{4} \ln \frac{3 + \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad (\cos 2x)^{(\ln \cos 2x)/4},$$

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}{\operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}}}.$$

11. Составить уравнение касательной и нормали кривой

a) $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$;

b) $y = 2x + \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$;

b) $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$ в точке со значением параметра $t_0 = \pi/3$.