Геометрическое введение в алгебраическую геометрию. Осень 2023г

Решения этих задач будут обсуждаться на следующем занятии. Внятно записанные (а лучше затеханные) решения можно присылать на почту alggem23@gmail.com, желательно до 24:00 субботы перед следующим занятием.

Задания с 6 занятия.

(1) Мы не доделали задачу 4 из прошлого задания: в аффинной карте $U_0 \subset \mathbb{P}^N$, заданной условием $w_{d,0,0,\ldots,0} \neq 0$, мы нашли отображение $p_0 : U_0 \cap v_{n,d}(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^n$ такое, что $p_0 \circ v_{n,d}$ тождественно на $\mathbb{P}^n$ (точнее, на его аффинной карте $x_0 \neq 0$). А именно, p_0 является проектированием и задается формулами $x_0 = w_{d,0,0,\ldots,0}$, $x_k = w_{d-1,0,\ldots 0,1,0,\ldots,0}$ (1 стоит в k-ой позиции) при $k > 0$. Для завершения решения задачи осталось проверить два утверждения:

а) композиция $v_{n,d} \circ p_0$ также тождественна на U_0;

б) $v_{n,d}(\mathbb{P}^n)$ содержится в объединении карт $U_0 \cup U_1 \cup \ldots \cup U_n$, где аффинная карта $U_k \subset \mathbb{P}^N$ задается условием $w_{0,\ldots 0,d,0,\ldots,0} \neq 0$ (d стоит в k-ой позиции).

(2) Покажите, что если $X = v_{1,d}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^d$ — кривая Веронезе, и $a \in X$, то проектирование p_a из точки a является регулярным отображением $X \to \mathbb{P}^{d-1}$ и $p_a(X) = v_{1,d-1}(\mathbb{P}^1)$.

(3) Мы лишь начали обсуждать задачу 5 из прошлого задания, выяснив только, что степень кривой $v_{1,3}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ равна трем. Мы обязательно разберем эту задачу на следующем занятии. Отметим, что предыдущая задача является существенной подсказкой для пункта в) (и не только).

(4) Гиперповерхностью X степени d в $\mathbb{P}^n$ называется множество нулей однородной формы $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ степени d. Прямая l называется касательной прямой к X в точке $a \in X \cap l$, если ограничение формы F на прямую l имеет в точке a не менее чем двукратный

нуль. Проективным касательным пространством $\mathbb{T}_a X$ к гиперповерхности X в точке a называется объединение всех касательных прямых к X в точке a. Докажите, что $\mathbb{T}_a X$ либо является гиперплоскостью $\mathbb{P}^{n-1}$ в $\mathbb{P}^n$, либо совпадает со всем $\mathbb{P}^n$. В первом случае точка a называется простой точкой на X, а во втором случае — особой точкой на X.

(5) Квадрикой Q в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ называется множество нулей квадратичной формы $F(x) = \sum a_{ij} x_i x_j = xAx^T$, где $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ (мы здесь записываем $x \in V$ как вектор-строку, тогда x^T это вектор-столбец), а $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица коэффициентов этой квадратичной формы. Квадрика называется невырожденной, если $\det A \neq 0$.

а) Напоминаем стандартный факт из линейной алгебры, что уравнение любой невырожденной квадрики в подходящей системе координат можно записать в каком-нибудь стандартном виде, например, $\sum_0^n x_i^2 = 0$.

б) Пусть $\det A = 0$ и $\operatorname{Ker} F \subset V$ — ядро формы F. (Его можно определить, например, как множество таких векторов $x \in V$, что $x' A x^T = 0 \ \forall \ x' \in V$.) Докажите, если $W \subset V$ такое подпространство, что $V = W \oplus \operatorname{Ker} F$, то ограничение F на W невырождено. (Это утверждение было пропущено при обсуждении на занятии.)

в) В условиях предыдущего пункта обозначим через $\widetilde{Q}$ невырожденную квадрику в $\mathbb{P}(W)$, задаваемую ограничением формы F на W. Покажите, что квадрика Q есть объединение всех прямых, соединяющих точки $\widetilde{Q}$ с точками из $\mathbb{P}(\operatorname{Ker} F)$. (Конечно, $\mathbb{P}(W)$ и $\mathbb{P}(\operatorname{Ker} F)$ проективные подпространства в $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$.)

г) В условиях предыдущего пункта покажите, что особые точки квадрики Q это в точности точки $\mathbb{P}(\operatorname{Ker} F)$.