Семинар 8.

Задача 1. Пусть C – невырожденная коника над любым алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$, $\mathrm{char}\,\mathbf{k} \neq 2$. Тогда в произвольной системе координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$ уравнение коники C имеет вид:

$$F(x) \equiv x^T A x = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_0\ x_1\ x_2)^T$ – вектор-столбец координат точки x, и A - симметрическая матрица 3×3 с условием $\det A \neq 0$, то есть $F(x)$ – невырожденная квадратичная форма от переменных (x_0, x_1, x_2). Рассмотрим отображение (очевидно, проективное, так как матрица A невырождена)

$$f_C : \ \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\sim} \check{\mathbb{P}}^2, \quad y \mapsto Ay.$$

Оно называется *полярным отображением (или поляритетом), задаваемым коникой* C.
Покажите, что $\check{C} = f_C(C)$ есть коника в двойственной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, называемая *двойственной коникой к конике* C. (По построению точки коники $\check{C}$ соответствуют прямым в $\mathbb{P}^2$, касательным к конике C.) Для этого найдите уравнение двойственной коники $\check{C}$.

Задача 2. Докажите, что коника, двойственная к конике $\check{C}$, совпадает с коникой C (*принцип двойственности*):

$$\check{\check{C}} = C.$$

Для этого рассмотрите полярное отображение $f_{\check{C}} : \ \check{\mathbb{P}}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^2$, задаваемое коникой $\check{C}$ и убедитесь, что оно является обратным к полярному отображению, задаваемому коникой C.

Задача 3. Пусть в вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ задана гладкая кривая C, то есть кривая, имеющая в каждой своей точке x единственную касательную прямую $\mathbb{T}_x C$. Рассмотрим отображение $f_C : C \to \check{\mathbb{P}}^2,\ x \mapsto \mathbb{T}_x C$, и пусть $\check{C} := f_C(C)$. Аналогично определим отображение $f_{\check{C}} : \check{C} \to \mathbb{P}^2,\ y \mapsto \mathbb{T}_y \check{C}$. Попробуйте доказать без вычислений *принцип двойственности*, утверждающий, что $f_{\check{C}}(\check{C}) = C$.

Задача 4. Рассмотрим 6-угольник $ABCDEF$, описанный около невырожденной коники $\mathcal{C}$. Докажите *теорему Бриашона*, утверждающую, что большие диагонали AD, BE, CF 6-угольника $ABCDEF$ пересекаютя в одной точке.

Задача 5. Рассмотрим 4-угольник $ABCD$, описанный около невырожденной коники $\mathcal{C}$, и пусть M, P, N, Q - точки касания с $\mathcal{C}$ прямых AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что прямые AC, BD, MN, PQ пересекаются в одной точке.

Задача 6. Рассмотрим треугольник ABC, описанный около невырожденной коники $\mathcal{C}$, и пусть A_1, B_1, C_1 - точки касания с C прямых BC, AC, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.