Семинар 7 .

Задача 1. Пусть $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$. Докажите, что если кривая C задается однородным уравнением степени 2 в однородных координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$:

$$F(x) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = x^T A x = 0, \qquad A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = a_{ji}, \qquad \det A \neq 0, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то C является коникой по Штейнеру, то есть найдутся две различные точки A и B кривой C и проективное отображение $f : \check{A} \to \check{B}$ такие, что C заметается точками $l \cap f(l)$, где $l \in \check{A}$.

Задача 2. 1) В условиях задачи 1, пусть точка $Y = (y_0 : y_1 : y_2)$ не лежит на кривой C. Покажите, что поляра $\mathbf{p}_Y$ точки Y относительно коники C задается уравнением

$$y^T A x = 0, \qquad \text{или, что равносильно,} \qquad x^T A y = 0. \tag{2}$$

2) Пусть теперь $Y \in C$. Докажите, что поляра $\mathbf{p}_Y$ точки Y относительно коники C, задаваемая в этом случае по определению уравнением (2), является касательной к конике C в точке Y.

Задача 3. Докажите, что если точка X лежит на поляре $\mathbf{p}_Y$ точки Y относительно коники C, то точка Y лежит на поляре $\mathbf{p}_X$ точки X относительно C.

Задача 4. Пусть коника по Штейнеру C задается проективном отображением $f : \check{A} \to \check{B}$. Рассмотрим прямые $\check{A}$ и $\check{B}$ в двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$. Для любых трех различных точек A, B, C на прямой $\check{A}$ рассмотрим точки $f(A), f(B), f(C)$ на прямой $\check{B}$ и построим по ним прямую Паппа m. Как мы знаем, эта прямая m не зависит от выбора точек A, B, C. Этой прямой m соответствует в исходной плоскости $\mathbb{P}^2$ точка M. Покажите, что M является полюсом прямой AB относительно коники C.