Семинар 6 .

Задача 1.

Пусть на конике по Штейнеру $\mathcal{C}$ даны 6 различных точек $A,\ B,\ C,\ A_1,\ B_1,\ C_1$. Докажите теорему Паскаля, которая утверждает, что три точки $M = AB_1 \cap A_1B,\ N = AC_1 \cap A_1C$ и $P = BC_1 \cap B_1C$ коллинеарны.

Задача 2. Пользуясь произволом в выборе проективных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ на плоскости P^2, а также в выборе проективного соответствия между пучками прямых, посредством которых построена коника по Штейнеру $\mathcal{C}$, найдите уравнение коники $\mathcal{C}$.

Задача 3. Пусть C – невырожденная коника, и O – произвольная точка вне C. Проведем три произвольные прямые l, m, n через точку O, пересекающие конику C в точках X и X_1, Y и Y_1, Z и Z_1 соответственно, как показано на рисунке ниже. Тогда по теореме Дезарга точки

$$S = (Y_1Z_1) \cap (YZ), \quad S' = (XZ_1) \cap (X_1Z), \quad S'' = (XY_1) \cap (X_1Y),$$

лежат на одной прямой, которую мы обозначим через $\mathbf{p}_O$. Докажите, что прямая $\mathbf{p}_O$ не зависит от выбора вписанных в конику C перспективных треугольников XY_1Z_1 и X_1YZ, для которых она является осью Дезарга. Она называется *полярой точки O относительно коники C*.

Задача 4. В условиях предыдущей задачи докажите, что произвольная прямая l через точку O, пересекающая конику C в двух различных точках A и B, пересекает поляру $\mathbf{p}_O$ в точке P такой, что пара точек OP гармонически делит пару точек AB.