Семинарский листок 7

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-I

Производная функции и её приложения

1. Найти производную функций

$a)$ $\sin x \cos x$; $b)$ $\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}$; $c)$ $\ln(\ln(\ln x)))$; $c)$ $\sqrt{x+\sqrt{x}}$; $d)$ $(2x+3)^2(x+1)^3$; $e)$ x^x.

2. Докажите, что производная чётной дифференцируемой функции — нечётная функция, Производная нечётной дифференцируемой функции — чётная функция.

3. Докажите, что функция $\operatorname{arctg} x$ не является рациональной.

4. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в данной точке, но дифференцируемой в проколотой её окрестности.

5. Каким условиям должны удовлетворять функции f и g, чтобы функция

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \geqslant a \\ g(x), & x < a \end{cases}$$

была дифференцируема на всей прямой?

6. Какие из функций $x \cdot |x|, |x|^{1+\sigma}, (\sigma > 0), x\sin(x^{-1}), x^2\sin(x^{-1})$ дифференцируемы в нуле?

7. Во всех ли точках отрезка $[0,1]$ дифференцируема канторова лестница?

8. Вычислите односторонние производные функций $\sqrt{1-e^{x^2}}$, $\sqrt{\ln(1+x^2)}$ в нуле.

9. При каких значениях $p, q \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(x^{-q}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема всюду на $\mathbb{R}$?

10. a) Уравнение касательной к кривой, заданной графиком функции f, в точке x_0 имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Составьте уравнение касательной к кривой, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

в точке со значением параметра $t = t_0$.

b) Выведите уравнение нормали к кривой, заданной графиком функции f, в точке x_0, если функция задана явно и если кривая задана параметрически.

c) Выпишите уравнение касательной и нормали кривой

1) $y = 2x^2 + 3x - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$;

2)

$$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases} \quad \text{в точке со значением параметра } t_0 = \pi/3.$$

11. Докажите неравенства:

$$a)\ \ln x < x-1 \text{ при } x>0; \quad b)\ e^x > 1+x,\ e^x > 1+x+\frac{1}{2}x^2 \text{ при } x>0;$$

$$c)\ (1+x)^\alpha > 1+\alpha x, (1+x)^\alpha > 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 \text{ при } x>0; \quad d)\ \sin x+\operatorname{tg} x \geqslant 2x \text{ при } x\in[0,\pi/2).$$

12. 1) *Обобщённая теорема Ролля.* Пусть f определена на $[a,b]$ и пусть определена и непрерывна $(n-1)-$ая производная $f^{(n-1)}$. Пусть на (a,b) определена $f^{(n)}$. Пусть $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и $f(x_0) = \ldots = f(x_n)$. Доказать, что в некоторой точке $\xi \in (x_0, x_n)$ справедливо $f^{(n)}(\xi) = 0$.

2) Пусть f определена на $[a,b]$ и пусть определена и непрерывна $4-$ая производная $f^{(4)}$. Пусть на (a,b) определена $f^{(5)}$. Пусть $x_0 < x_1 < x_2$ и $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = f''(x_0) = 0$. Доказать, что в некоторой точке $\xi \in (x_0, x_2)$ справедливо $f^{(5)}(\xi) = 0$.

13. a) Выведите формулу для первой производной функции, заданной параметрически.

b) Доказать, что вторая производная параметрически заданной функции вычисляется по формуле

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

14. Найти пределы

$$a)\ \lim_{x\to 0+0} (\sin x)\ln x; \quad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}; \quad c)\ \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}};$$

$$d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}; \quad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x/3} - \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}}{x^3}.$$