

ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА – 2023
ЛИСТОК 6

1. Убедитесь, что полиномы Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n + 1)P_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и докажите, что $P_n(1) = 1$.

2. Докажите, что при $|z| < 1$ справедливо разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)z^n,$$

где $P_n(t)$ – полиномы Лежандра.

3. Докажите рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра:

а) $(n + 1)P_{n+1}(t) - (2n + 1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$

б) $(2n + 1)P_n(t) = P'_{n+1}(t) - P'_{n-1}(t).$

4. Докажите, что

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \frac{2}{2n + 1} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

5. Найдите главный член асимптотики второго линейно-независимого решения дифференциального уравнения для полиномов Лежандра вблизи точек $x = \pm 1$.

6. Докажите, что функция $r^n Y_n^m(\theta, \varphi)$, где Y_n^m – сферическая функция, является однородным полиномом от x, y, z степени n .